Nombre d'or – Approximation

A partir d'une activité proposée sur le site de G Connan.

Partie I : Le nombre d'or

1) Soit ABCD un carré de côté 1. Retrouver les étapes de la construction du rectangle ADFE, puis refaire la construction sur votre copie en choisissant pour unité 10 cm. (C et E sont sur un cercle de centre I, avec I milieu de [AB]).

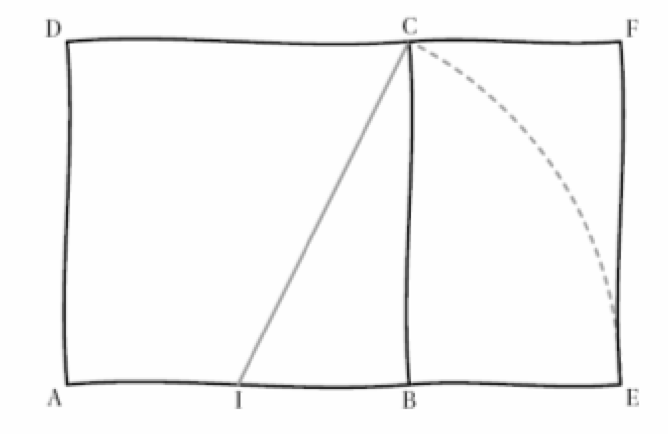

FIG. 1 – Rectangle d'or

2) Montrer que $AE = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Ce nombre est noté ϕ et l'on l'appelle le nombre d'or. Le rectangle obtenu par la construction donnée est appelé un rectangle d'or.

3) Donner, à l'aide de votre dessin, une valeur approchée de ϕ. Quelle est à votre avis l'ordre de grandeur de la précision ?

4) A l'aide de la calculatrice, donner une valeur arrondie à 10^{-5} près de ϕ.

Partie II : Des suites de nombres…

1) A l'aide de la calculatrice, donner une approximation des nombres suivants :

$$a_1 = \sqrt{1+\sqrt{1}},\ a_2 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}},\ a_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}} \text{ et } a_4 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}.$$

Voici comment calculer plus facilement ces nombres avec la calculatrice :

```
1→A
                1
√(1+A)→A
      1.414213562
      1.553773974
      1.598053182
      1.611847754
█
```

Expliquer pourquoi cela nous donne bien les nombres voulus.

En continuant ce procédé, déterminer le nombre minimal d'étapes n pour que $\phi - a_n \leq 10^{-9}$.

2) En utilisant au mieux la calculatrice, donner une approximation des nombres $b_1 = 1+\dfrac{1}{1}$,

$$b_2 = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}},\ b_3 = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}},\ b_4 = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}} \text{ et } b_5 = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}.$$

En continuant le procédé, déterminer le nombre minimal d'étapes n pour que $\phi - b_n \leq 10^{-9}$.