

**1) De quoi s'agit-il ?**

Algorithme de Collatz :

- Choisir un nombre entier  $a$ .
- Si le nombre est pair, on le divise par 2 et on obtient un nouveau nombre.
- Si le nombre est impair, on le multiplie par 3, on ajoute 1 au résultat et on obtient un nouveau nombre.
- On recommence la procédure avec le nouveau nombre obtenu.

Faire quels essais : avec  $a = 5$  puis  $a = 12$  en recommençant le procédé 10 fois.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

On obtient une suite de nombres qui est appelée **le vol** du nombre de départ, les nombres de la suite sont appelés **les étapes** du vol, le plus grand nombre obtenu dans la suite est appelé **l'altitude maximale** du vol et le nombre d'étapes avant d'obtenir 1 est appelé **la durée** du vol.

Conjecture de Syracuse :  
*(Une conjecture est une supposition, une affirmation qui n'est pas démontrée)*

On finit toujours par obtenir 1 dans la suite obtenue avec l'algorithme de Collatz avec n'importe quel nombre au départ.

On peut faire des essais : [http://trucsmaths.free.fr/js\\_syracuse.htm](http://trucsmaths.free.fr/js_syracuse.htm)

**2) Notation indicielle**

Pour  $a = 7$  on obtient la suite de nombres :  $7 - 22 - 11 - 34 - 17 - \dots$  etc.  
 on note  $U_0 = 7$   $U_1 = 22$ ,  $U_2 = 11 \dots$   $U_n$  est le terme de rang  $n$  ou d'indice  $n$ .

L'ensemble de tous les nombres est une suite notée  $(U_n)$ .

Combien vaut  $U_5$  ?  $U_6$  ? .....

Le terme suivant  $U_n$  est  $U_{n+1}$ . Comment obtient-on  $U_{n+1}$  à partir de  $U_n$  ?

.....

.....

.....

Comment pourrait-on calculer  $U_{20}$  ? .....

Cette suite est donc définie par son premier terme  $U_0$  et une relation entre  $U_{n+1}$  et  $U_n$  appelé relation de récurrence.

### 3) Algorithme de calcul

a) On peut écrire un algorithme qui affiche les 20 premiers termes de cette suite à partir de la donnée du premier terme :

*On demande U la valeur du premier terme de la suite*

*On fait 20 fois :*

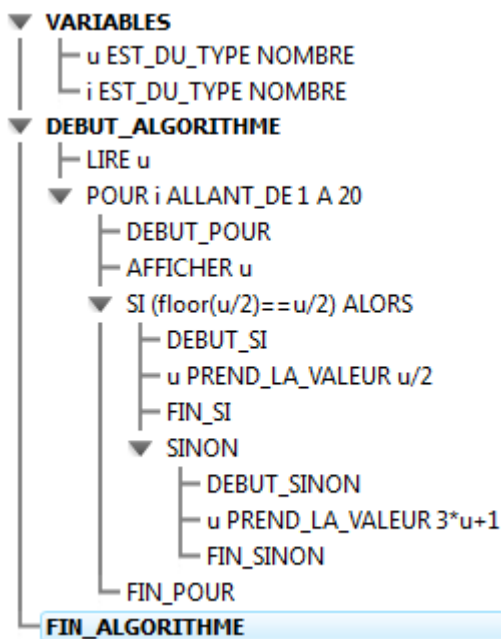
- *Afficher U*
- *Si U est pair alors on remplace U par  $U/2$  sinon par  $3*U+1$*

Pour tester la parité d'un nombre  $a$  :

$a$  est pair si c'est un multiple de 2, c'est-à-dire si le quotient de  $a$  par 2 est encore un nombre entier. Cela est équivalent de dire que la partie entière de  $a/2$  est égal à  $a/2$ .

On peut maintenant programmer cet algorithme :

Avec Algobox cela donne :



Utiliser votre programme pour compléter le tableau suivant :

$U_0$	Les 20 premiers termes de la suite ( $U_n$ )
1	1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4
2	2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1
3	
4	4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 1
5	5 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2
6	6 ; 3 ; 10 ; 5 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2
7	
8	
9	9 ; 28 ; 14 ; 7 ; 22 ; 11 ; 34 ; 17 ; 52 ; 26 ; 13 ; 40 ; 20 ; 10 ; 5 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1
10	10 ; 5 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4
16	16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1
21	

On peut aussi avec Algobox, représenter graphiquement cette suite en définissant d'abord un repère :

Opérations standards Utiliser une fonction numérique Dessiner dans un repère

Utiliser un repère Définir le repère

Ajouter TRACER.POINT Xmin : 0 Xmax : 20 Graduations X : 1

Ajouter TRACER.SEGMENT Ymin : 0 Ymax : 100 Graduations Y : 1

**VARIABLES**

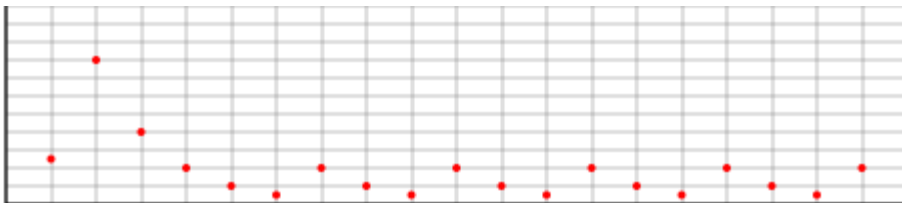
- u EST\_DU\_TYPE NOMBRE
- i EST\_DU\_TYPE NOMBRE

**DEBUT\_ALGORITHME**

- LIRE u
- POUR i ALLANT\_DE 1 A 20
  - DEBUT\_POUR
  - AFFICHER u
  - TRACER\_POINT (i, u)
  - SI (floor(u/2) = u/2) ALORS
    - DEBUT\_SI
    - u PREND\_LA\_VALEUR u/2
    - FIN\_SI
    - SINON
      - DEBUT\_SINON
      - u PREND\_LA\_VALEUR 3\*u+1
      - FIN\_SINON
  - FIN\_POUR

**FIN\_ALGORITHME**

On obtient, avec 5 comme premier terme, le graphe suivant : (Rajouter le repère).



On retiendra que la représentation graphique d'une suite  $(U_n)$  est l'ensemble des points de coordonnées  $(n, U_n)$ .  
 $n$  est un entier naturel. On ne relie pas les points.

- Ecrire l'algorithme qui affiche cette suite de nombres, avec pour condition d'arrêt l'obtention du chiffre 1.
- Incorporer à ce programme un compteur qui détermine la durée du vol.
- Faire ensuite afficher l'altitude du vol.

e) Compléter le tableau ci-dessous :

$U_0$	$p$	altitude
1		
2		
3		
4		
5		
6	9	16
7		
8		
9		
10		

**4) Des suites particulières**

Compléter le tableau suivant :

$U_0$	Les termes de la suite $(U_n)$ jusqu'à l'obtention de 1
2	2 ; 1
4	4 ; 2 ; 1
8	
16	

Quelle remarque peut-on faire sur les «  $U_0$  choisis » ? .....

Dans ces cas particuliers, quelle est la relation de récurrence entre  $U_{n+1}$  et  $U_n$  ?.....

A l'aide du logiciel, représenter graphiquement ces suites.

Supposons que  $U_0 = 1024$ . Comment calculer  $U_6$  à partir de  $U_0$  ?

.....  
 .....