Perspective historique dans les programmes de 1ère et terminale L

Dans les commentaires du programme il est dit que « *quoique faisant partie du patrimoine culturel de l'humanité, il s'avère que la culture scientifique n'a pas actuellement la place qui lui revient dans la culture générale. Pour ce qui est des mathématiques, elles ont d'une part une histoire qui est liée à l'évolution des civilisations qui les ont engendrées et qui se continue encore aujourd'hui, et d'autre part des liens avec d'autres champs d'étude importants pour les élèves de cette série, comme la littérature, les arts et la philosophie …* ». Je pense d'ailleurs que sur ces questions il n'y a aucune raison de se limiter aux élèves de la série L. Je rappelle ce passage du programme pour insister sur le fait que ces questions ne doivent pas être traitées de manière marginale. Si tous ceux qui sont chargés de faire appliquer et d'appliquer ces programmes n'y accordent pas autant d'intérêt qu'à leurs autres aspects, comment attendre des élèves et de nos concitoyens qu'ils reconnaissent notre discipline dans toutes ses dimensions. Ou alors, autant dire aux auteurs de ces programmes qu'il s'agit de simples clauses de style, du verbiage sans intérêt.

Une autre chose me paraît importante pour que ce que je viens de rappeler ne soit pas vain : l'acquisition de cette culture scientifique, de cette histoire, demande **du temps long**. Il est donc fondamental que les 3 heures de mathématiques auxquels ont droit les élèves de l'enseignement obligatoire au choix en 1ére et de l'enseignement de spécialité en terminale, soient effectives. Cela veut donc dire que les enseignements de ces classes ne soient pas considérés comme des variables d'ajustement des DGH, des bouclages d'emploi du temps, voire des voies de dégagement … Ces programmes sont ambitieux, il ne s'agit plus de discuter sur leur pertinence, il s'agit de répondre à cette ambition pour que cette option ne se transforme pas en fiasco.

Enfin, il ne s'agit pas de raconter une histoire mais de faire fonctionner les mathématiques à partir de leur histoire. C'est ce que le groupe de l'IREM de Rennes dont je suis membre s'efforce de réaliser et promouvoir depuis de nombreuses années.

Arithmétique

Pour l'arithmétique, je résumerai le programme par ces deux images.

La **Tablette Plimpton 322** (Collection Plimpton à l'Université de Columbia). Une tablette d'argile constituée de 4 colonnes sur laquelle je vais revenir plus loin.

Le **Code Barre** d'un livre publié cette année dont le code ISBN, pour International Standard Book Number, est 2-7298-2568-1. Ces codes permettent l'identification de tous les ouvrages édités dans le monde entier. Ils sont réalisés avec trois séries A – B – C de chiffres de longueur variable et une série D de longueur fixe. Le nombre total de chiffres est fixé à 10.

La série A identifie la communauté linguistique. Elle est constituée des chiffres 0 ou 1 pour les productions anglo-saxonnes, du chiffre 2 pour les francophones, 3 pour les germanophones. Sa longueur variable peut aller jusqu'à 5 caractères au maximum pour les langues éditées en nombre peu élevé. Par exemple, pour les productions marocaines A = 9954.

La série B identifie l'éditeur. Elle est de longueur variable : de 1 caractère pour les éditeurs ayant une édition très importante à 7 caractères pour les éditeurs ayant une production faible.
La série C indique le numéro d'ordre de l'ouvrage chez l'éditeur. Elle est aussi de longueur variable, de 1 caractère pour les éditeurs ayant une édition faible, à 6 pour les éditeurs ayant une édition élevée. **Cette zone est complétée par des zéros en sorte que la longueur totale, y compris la clé finale, soit égale à 10 chiffres dont X.**
La dernière série, D, donne la clé de vérification. Elle est composée d'un chiffre de 0 à 9 ou de X qui représente le nombre 10. Cette clé est calculée à partir des 9 chiffres qui la précèdent. Ainsi le code ISBN 2-7298-2568-1 indique que le livre est en langue francophone, l'éditeur (Ellipses) est identifié par le nombre 7 298, chez cet éditeur l'ouvrage est identifié par le nombre 2 568 (Mathématiques, Enseignement obligatoire au choix – Première L) et la clé de contrôle est 1.
Calcul de la clé : on attribue une pondération décroissante de 10 à 2 à partir du premier chiffre de la liste du code. On détermine ensuite à quel reste r de la division euclidienne par 11 la somme de ces nombres est congrue modulo 11. Si $r = 0$, la clé est 0 ; si $r = 1$ la clé est X ; enfin si $1 < r \leq 10$ la clé est $11 - r$. Ainsi pour le code ISBN précédent on a :

Pondération	10	9	8	7	6	5	4	3	2
Chiffre	2	7	2	9	8	2	5	6	8
produit	20	63	16	63	48	10	20	18	16

La somme de ces nombres est 274 et $274 \equiv 10 \bmod 11$. La clé de contrôle est 11 - 10 = 1.
Un nouvel ISBN utilisant 13 chiffres a été établi, il entrera en vigueur au 1er janvier 2007.

Babylone – 1800

Plimpton 322

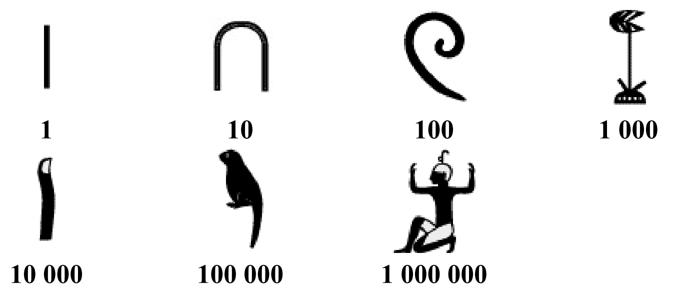
Publication 2005

Code barre

9 782729 825683

Le système égyptien de numération

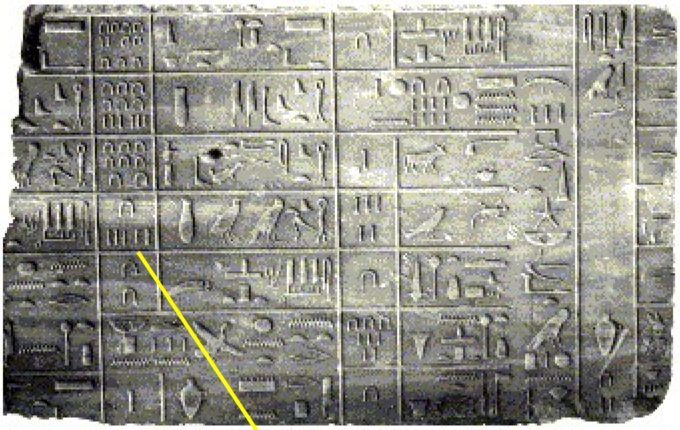
La civilisation de l'Egypte des pharaons s'étend environ de –3300 à –300 avec de nombreux avatars, passant de la domination perse à la domination romaine pour finir sous la domination arabe. Les scribes utilisaient une **écriture hiéroglyphique**, expression venant du grec *hieros* « sacré » et *gluphein* « graver ». Il s'agit d'idéogrammes. Par exemple, la représentation d'un homme dansant indique le concept de joie . Cette écriture ayant un caractère solennel était utilisée parallèlement à l'**écriture hiératique** qui est une schématisation des hiéroglyphes et se prête à une écriture rapide . Pour écrire les nombres les scribes disposaient de différents symboles : une barre verticale pour l'unité, une anse de panier pour la dizaine, une corde enroulée pour la centaine, une fleur de lotus pour le millier, un doigt levé pour la dizaine de milliers, un têtard pour la centaine de milliers, un homme agenouillé pour le million. La lecture des nombres pouvait se faire de gauche à droite avec les symboles indiqués ci-dessous mais aussi de droite à gauche en utilisant leurs symétriques par rapport à une verticale. C'est ainsi que 1 000 de gauche à droite  devient de droite à gauche . L'écriture et la lecture pouvaient aussi se faire de haut en bas ou de bas en haut.



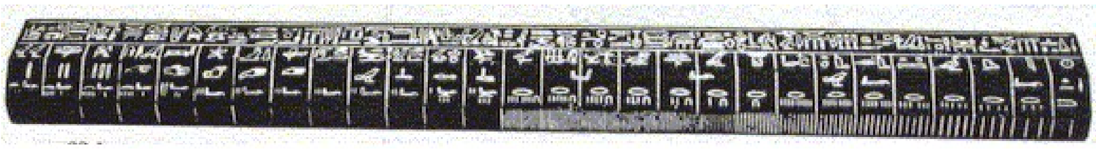
Le système égyptien de numération est **additif**, c'est-à-dire que la lecture d'un nombre s'effectue en faisant la somme des valeurs des symboles écrits. Ainsi 2 525 s'écrit-il :

Cela s'obtient de la manière suivante : cinq unités donc 5, plus deux dizaines  soit 20, plus cinq  (centaines) soit 500 et deux  (milliers) soit 2 000. L'addition de ces nombres donne 2 525.

<u>Remarque</u> la numération égyptienne signifiait des nombres fractionnaires par le symbole de la bouche : , c'est ainsi que le symbole  désigne la fraction $\frac{1}{13}$.



Calendrier de l'île éléphantine

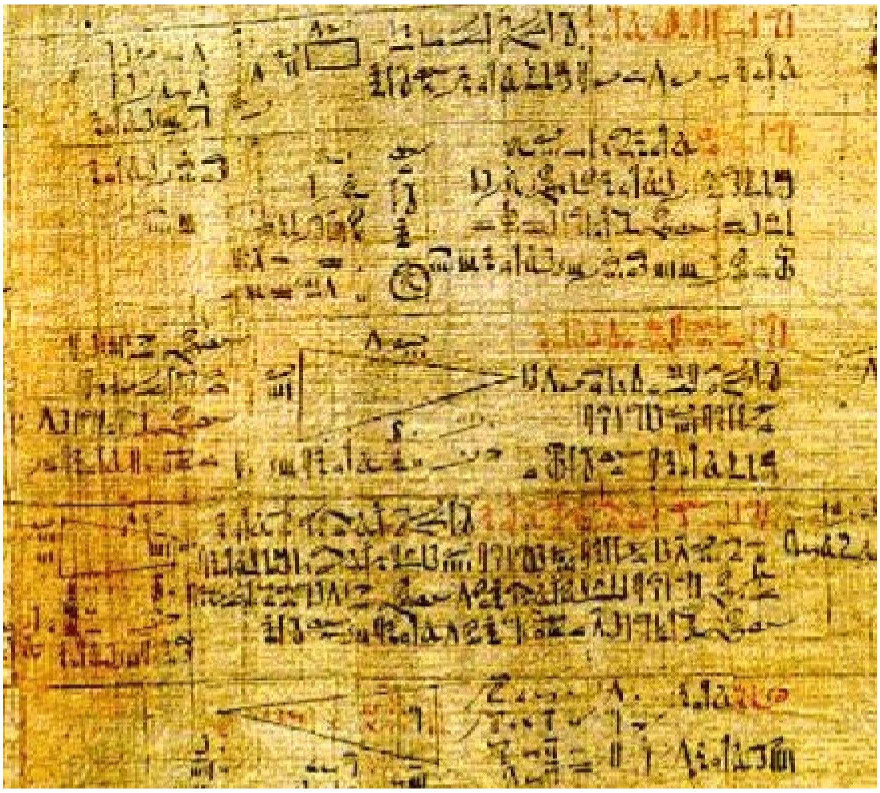


Coudée royale (Musée du Louvre)

Il ne faut pas oublier qu'à côté de cette écriture plutôt réservée aux monuments et objets solennels c'est l'écriture hiératique qui était utilisée et aussi pour les calculs.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

C'est dans cette écriture qu'est rédigé le très connu papyrus Rhind. Il est daté d'environ – 1 650. Le nom de « Ahmes » y figure, personnage dont on ne sait rien.
Le papyrus contient 87 problèmes dont :
• la décomposition des fractions en fractions de numérateur 1.
• des multiplications et divisions.
• la résolution d'équations.
• l'arpentage (mesures des distances) et à la géométrie : aires planes et volumes.



Ce document est conservé au British Museum

Le système mésopotamien de numération

La Mésopotamie est une région d'Asie Mineure comprenant les vallées du Tigre et de l'Euphrate. Elle s'étend du Kurdistan au Golfe persique, c'est-à-dire sur la majeure partie de l'Irak. Babylone, la ville phare de Mésopotamie, dont les ruines sont situées à 160 km de Bagdad, atteignit son apogée sous Hammurabi vers –1700. L'un des systèmes de numération utilisés à partir de –1800 trouve son origine dans la numération sumérienne. Il est fondé seulement sur deux symboles : un « clou » pour l'unité, un « chevron » pour la dizaine.

𒁹	𒌋
1	**10**

Le nombre 26 s'écrit 𒌋𒌋𒐋, comme pour la numération égyptienne, il s'agit là d'une numération additive. Ainsi a-t-on 2×𒌋 qui font 20 plus six unités 𒁹 soit 26. Les nombres de 1 à 59 étaient écrits ainsi. Pour les nombres dépassant 60, les scribes mésopotamiens procédaient par « paquets », chaque « paquet » représentant une puissance de 60. Pour écrire 673, qui est égal à $11\times 60 + 13$, il était écrit 𒌋𒁹 𒌋𒐈 soit 11 soixantaines et 13 unités, donc en partant de la droite un premier « paquet » pour ce qui est compris entre 0 et 59 ; un deuxième « paquet » pour ce qui est compris entre 60 et 59×60 et ainsi de suite.
On constate que dans ce type d'écriture numérique la valeur d'un « paquet » dépend de sa position. Il s'agit donc d'un système de numération positionnel couplé à un système additif. Le premier « paquet » désigne un nombre d'unités compris entre 1 et

59 ; le deuxième « paquet » désigne un nombre de soixantaines, compris entre 1 et 59, le « paquet » suivant désigne un nombre de « soixantaines au carré », etc.

Le caractère positionnel suggéré par les « paquets » conduit au problème de l'indication des paquets. A l'origine **le système des Babyloniens ne comporte pas de zéro**, en sorte que l'on notait de la même façon les nombres 1, 60, 3 600. Bien sûr cela pose problème car à la difficulté de distinction des « paquets » s'ajoute l'absence d'indication de ceux de valeur nulle. Ainsi est-il difficile, sauf par connaissance du contexte, de savoir si : 𒌋𒁹 et 𒌋 𒁹 et 𒌋 𒁹 représentent des nombres différents ou pas, la confusion pouvant se faire entre un seul « paquet » ou deux « paquets » successifs ou un premier « paquet », un deuxième nul donc ne figurant pas et un troisième encore bien d'autres possibilités.

Cette absence d'un symbole signifiant l'inexistence d'un « paquet » est déjà un premier obstacle. Ce problème a commencé à être résolu à l'époque séleucide (aux alentours de –300) par l'introduction des symboles 𒑱 et 𒑱 qui séparent les « paquets ». Au début, symboles de séparation des « paquets », ils ont fini par indiquer l'absence d'un « paquet ». Cela résout le problème initial car, alors, 𒌋 𒁹 représente bien 10 + 1 = 11.

𒌋𒁹	𒌋 𒁹	𒌋 𒁹
10 + 1 = 11	$10 \times 60 + 1 = 601$	$10 \times 60^2 + 1 = 36\ 001$
séparateur	𒌋𒑱 𒁹	𒌋𒑱𒁹
	$10 \times 60 + 1 = 601$	$10 \times 60^2 + 0 \times 60 + 1 =$ 36 001
	𒌋𒑱 𒁹	𒌋𒑱𒁹
Puissance absente	$10 \times 60^2 + 0 \times 60 + 1 =$ 36 001	$10 \times 60^3 + 0 \times 60^2 + 0 \times 60 + 1$ = 36 001216 001

Il m'apparaît que le problème du zéro se pose essentiellement dans une situation de communication lointaine ou de calculs purement mathématiques. Dans les situations à caractère concret, le contexte est suffisant pour éviter toute mauvaise interprétation. Je pense qui plus est, que ce système mixte additif-base soixante est parfaitement bien adapté. Si on revient au cas analysé précédemment la différence entre les nombres 11, 36 001 et 216 001 est tellement élevée qu'il ne peut y avoir confusion. Si l'on parle par exemple du nombre de moutons qu'un propriétaire a dans son étable, l'interprétation ne peut être que 11. Par contre, s'il s'agit de calculs purement mathématiques hors contexte, il n'y a pas de raison de s'intéresser plus à 11 qu'à 36 001 ou 216 001

Revenons à la tablette Plimpton

La dernière colonne est une numérotation des lignes, on peut voir en fin de dixième ligne le chevron 𒌋 correspondant à 10 et sur les suivantes les nombres 11 𒌋 𒁹, 12 𒌋 𒁹𒁹…

Examinons la ligne 10 :

1 35 10 2 28 27 24 26 40 $1+\frac{35}{60}+\frac{10}{60^2}+\frac{2}{60^3}+\frac{28}{60^4}+\frac{27}{60^5}+\frac{24}{60^6}+\frac{26}{60^7}+\frac{40}{60^8}$ **1,586 122 566 110 35** exactement	1 22 41 $1\times 3\,600+22\times 60+41$ **B = 4 961**	2 16 1 $2\times 3\,600+16\times 60+1$ **C = 8 161**	10

Si on pose $A^2 = C^2 - B^2 = 8\,161^2 - 4\,961^2 = 41\,990\,400$, alors $C^2/A^2 = 8161^2 / 41\,990\,400 = 1{,}586\,122\,566\,110\,35$ exactement. Il s'agit donc d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs A et B et d'hypoténuse C. La première colonne contient donc le carré de l'inverse du sinus ou du cosinus d'un des angles du triangle rectangle.

La numération grecque

Les systèmes ont été plus ou moins différents suivant les cités grecques et les époques. L'un d'entre eux, **le système attique, d'Athènes,** est constitué de dix symboles qui sont :

I	**Γ**	**Δ**	**𐅄**	**H**	**𐅅**	**X**	**𐅆**	**M**	**𐅇**
1	5	10	50	100	500	1 000	5 000	10 000	50 000

Ce système fonctionne sur un principe additif, ainsi quarante huit s'écrit de la manière suivante **Δ Δ Δ Δ Γ I I I** soit 10 + 10 + 10 + 10 + 5 + 1 + 1 + 1.

On peut aussi remarquer une sorte de principe multiplicatif faisant figurer le multiplicateur à l'intérieur du nombre multiplié, c'est ainsi que cinquante s'écrit **𐅄** soit 5×10, cinq cents **𐅅** soit 5×100 ; **𐅆** cinq milles 5×1000 ; **𐅇** cinquante milles 5× 10 000. En fait il s'agit de six symboles de base auxquels s'ajoutent quatre symboles composés à l'aide de la combinaison de la lettre Pi écrite dans sa forme archaïque **Γ** et des lettres Delta **Δ**, Eta **H**, Khi **X** et Mu **M**. Avec ces conventions, le nombre 32 678 s'écrit **MMMXX𐅅H𐅄ΔΔΓIII**. Nous pouvons remarquer que, pour un nombre s'écrivant avec cinq symboles dans notre système, il en fallait quatorze avec le système attique.

La numération romaine

Le mode d'écriture numérique de Rome disposait de sept symboles de base, ces symboles n'étant d'ailleurs pas les symboles d'origine mais le résultat d'une évolution qui s'est achevée au premier siècle de notre ère :

I	**V**	**X**	**L**	**C**	**D**	**M**
1	5	10	50	100	500	1 000

Ce système romain utilise une présentation complexe : I une unité, II deux unités, III trois unités. Le quatre « IV » se présente comme le nombre qui précède le cinq d'une unité (on peut dire « 1 ôté de 5 »), V symbole particulier, le six se présente comme le nombre qui suit le cinq de une VI (on peut dire 5 + 1), VII, VIII. Le neuf, IX, se présente comme le nombre qui précède dix (« 1 ôté de 10 »). La règle générale est que dans une lecture de gauche à droite la valeur de tout symbole numérique de valeur inférieure à celle exprimée par le symbole immédiatement situé à sa droite se retranche de cette valeur. C'est ainsi que vingt neuf est noté XXIX soit 10 + 10 + (10 – 1).

Ces modes d'écriture numérique servaient avant tout à retenir les nombres, des dates par exemple. Mais, que ce soit le système grec ou le système romain, aucun des deux ne permettait de faire des calculs complexes. Il s'agit d'ailleurs là d'une bizarrerie venant de peuples qui pourtant avaient porté les connaissances scientifiques, donc la capacité de calcul, à un haut niveau.

CCCXLIV	**MMDCCCXLII**	**MMMCDLXXXIX**
344	**2 842**	**3 489**

Les abaques

Pour calculer, Grecs et Romains utilisaient des abaques. Ce terme vient du grec *abax* signifiant plateau ou table qui a conduit au latin *abacus* correspondant au concept de ce qui est plat. De fait pour effectuer les calculs il fallait disposer d'une surface plate et de jetons. Sur la table un tableau était construit. Les colonnes verticales séparent les « niveaux » de nombre et une ligne horizontale permet de substituer un jeton placé au-dessus à cinq jetons situés au-dessous de la même colonne. Cette séparation en entre nombres compris entre 1 et 4 et compris entre 5 et 9 ; compris dizaines de 10 à 40 et dizaines de 50 à 90 conduit aux distinctions I et V ; X et L ; C et D Un exemple, l'addition de **MMDCCCXLV** (2 845, jetons ①) et **MMMCDLXXXIX** (3 489, jetons ②). On peut remarquer que la distinction écrite de 5, 50, 500 correspond à la ligne supérieure de l'abaque.

M et 𐅆	**C et D**	**X et L**	**I et V**
	①		①
①①	①①①	①①①①	

M et 𐅆	**C et D**	**X et L**	**I et V**
	②	②	①②
①①②②②	①①①②② ②②	①①①①② ②②	②②②②

M et 𐅆	**C et D**	**X et L**	**I et V**
●	②●	②●	
	②②	②②●	②②②②

M et 𐅆	**C et D**	**X et L**	**I et V**
●			
●	●●●	●●●	●●●●

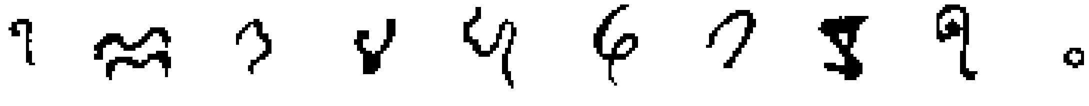
On obtient pour résultat **|X|MCCCXXXIV** (6 334). Il s'agit là d'un exemple simple voulant indiquer comment fonctionnent les abaques. Il y a eu diverses variantes suivant les lieux et les époques. Sur cet exemple romain on constate le caractère fastidieux de la représentation des grands nombres. Aussi les nombres 5 000, 10 000, 50 000 et 100 000 furent-ils représentés avec les graphismes respectifs suivants ↁ, ↂ, ↇ et ↈ. Cela permettait d'écrire le résultat de notre opération sous la forme **ↁMCCCXXXI**. Une autre écriture a consisté à surligner pour indiquer la multiplication par 1 000, $\overline{\text{V}}$ désigne 5×1 000 = 5 000, $\overline{\text{X}}$ représente 10 000 et $\overline{\text{LXI}}$ représente 61 000.
Les abaques ont été un outil de calcul du Moyen-Âge. Cet outil a perduré très tard, défendu jusqu'au XVII[e] siècle par les abacistes, partisans des calculs par ce moyen. La Révolution française a sonné leur déclin. En effet, en unifiant les systèmes de mesure et en imposant le système décimal, elle facilitait les calculs qui pouvaient dès lors se faire « aisément à la main ».

Nos chiffres et l'indispensable 0

Le mot zéro vient de l'italien *zefiro* qui a remplacé l'ancien français *cifre* qui vient lui-même comme *zefiro* de l'arabe *sifr*. Il en est de même de notre mot chiffre, *cipher* en anglais, en arabe ce mot signifie 0. Nous l'avons vu, le système mésopotamien était parvenu à une notation permettant de signifier l'absence de soixantaine ou de « puissance de soixantaines ». Cependant, d'après les textes d'époque dont nous disposons, cette absence ne peut pas être totalement assimilée à notre 0 qui signifie explicitement une absence de coefficient.
De nombreux éléments convergent pour supposer une origine indienne du zéro comme de nos autres chiffres. Dans des textes écrits en langue sanskrite datant du IV[e] siècle apparaissent déjà des numérations décimales de position. Le symbole 0 y indique une place vacante dans l'écriture d'un nombre. Cette notation permet de lever une incertitude rencontrée dans plusieurs systèmes numériques : aucun rang n'est vide dans l'écriture d'un nombre.

Numération devanagâri

Les chiffres devanâgâri viennent de l'écriture gupta de la dynastie du même nom qui a règné sur la vallée du Gange de 250 à 535. Nâgâri désigne l'écriture citadine à partir du VII ème siècle. Sa régularité conduit à la désignation devanâgâri « nâgâri » des dieux.



Quant à nos chiffres, ils nous viennent du Maghreb par l'Italie et l'Espagne andalouse des califats, ils sont dits chiffres *ghubār*. Ces écritures viennent des symboles de numération indienne après bien des transformations. Les symboles d'écriture des chiffres au Moyen-Orient sont eux appelés *hindi*.

Chiffres indi

٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩

Pour conclure, notre système décimal qui paraît si aisé a été le résultat d'une longue maturation au travers de multiples civilisations. Comme les symboles exprimant nos chiffres, il n'est ni la propriété ni l'héritage d'aucune civilisation, peuple ou conception spécifique du monde. Au contraire, il s'agit bien là d'une construction commune à l'humanité.

Gérard HAMON