Mnémosyne n° 3 (Octobre 1992) Bulletin du groupe M : A.T.H. de l'université de Paris VII

CONTE DU LUNDI

Euclide a encore quelque chose à dire

Gérard HAMON
IREM Rennes

La sortie en 1990 d'une nouvelle traduction par Bernard Vitrac des livres I à IV, (Géométrie plane) du texte de Heiberg (publication de 1883 à 1889) "EUCLIDE D'ALEXANDRIE - LES ELEMENTS" aux P.U.F., a été un stimulant pour se replonger dans Euclide. Bien que nous utilisions plus ou moins régulièrement le terme de géométrie euclidienne, il faut admettre que nous avons bien rarement eu entre les mains une traduction ou un passage important d'une traduction d'Euclide que ce soit comme élève ou comme professeur. Pourtant, les enseignements d'Euclide, antérieurs de 300 ans à ceux du Christ, continuent aujourd'hui encore à régir une bien grande part de la géométrie apprise à l'école, au collège ou au lycée. C'est avec un plaisir certain que nous avons redécouvert, sinon découvert, l'élaboration pas à pas de cette géométrie, en commençant par les Définitions « **1**. Un point est ce dont il n'y a aucune partie » …, puis les Demandes « **1**. Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point »..... ; les Notions Communes, « **1**. Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles"... enfin les Propositions « **1**. Sur une droite limitée donnée construire un triangle équilatéral »... La volonté constante de rigueur, alliée souvent à une certaine esthétique, caractérise la source d'une partie des mathématiques que nous enseignons aujourd'hui et l'exhibition des modèles qui ont fondé nombre de nos méthodes de raisonnement actuelles ne peuvent laisser indifférent. Aussi, nous a-t-il paru utile et rafraîchissant de faire travailler les élèves directement sur Euclide.

Le travail à partir de textes sources doit apparaître comme efficace et, surtout, ne compliquant pas les choses pour le seul plaisir d'utiliser des textes historiques. Ce souci guidant notre recherche, nous n'avons pas eu à aller très loin pour trouver le thème de notre première activité. Nous nous sommes arrêtés dès la deuxième proposition du livre I, proposition au premier abord qui semblait bien anodine :

« ***Placer en un point donné une droite égale à une autre droite*** »

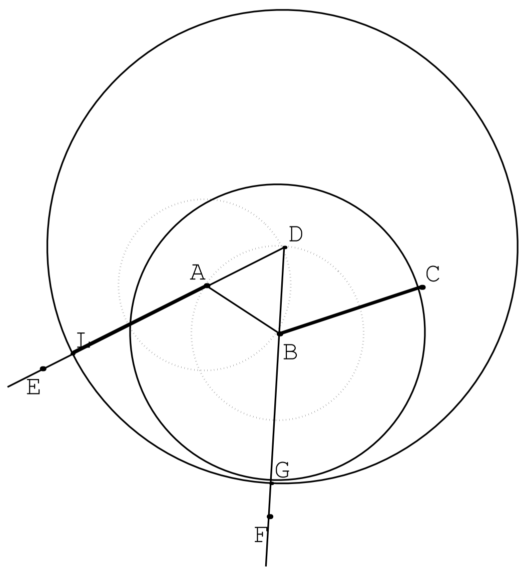
Cela semblait évident et plutôt comme destiné à souscrire à une exigence de rigueur dans le moindre détail. Les compas que nous utilisons régulièrement servent à transporter des longueurs, alors pourquoi diable démontrer cette proposition dès le début comme si c'était très important ?

En y regardant de plus près, la démonstration d'Euclide ne nous a pas parue banale. En fait c'était là qu'il construisait le compas théorique validant pour toujours les compas matériels utilisés depuis des générations.

Voici la démonstration:

Soit d'une part A le point donné, d'autre part BC, la droite[1] *donnée. Il faut alors placer au point A une droite égale à la droite donnée.*

[1] Dans Euclide, droite signifie aujourd'hui segment.



En effet, que soit jointe la droite AB, du point A jusqu'au point B (Dem. 1), et que, sur elle, soit construit le triangle équilatéral DAB (Prop. 1). Et que les droites AE, BF soient les prolongements en ligne droite de DA, DB (Dem. 2). Et que du centre B et au moyen de l'intervalle BC soit décrit le cercle CGH, et qu'ensuite du centre D et au moyen de l'intervalle DG soit décrit le cercle GKL (Dem. 3).
Or, puisque le point B est le centre du cercle CGH, BC est égale à BG ; ensuite, puisque le point D est le centre du cercle GKL, DL est égale à DG (Déf. 15), desquelles la partie DA est égale à la partie DB (Déf. 20) ; donc la partie restante AL est égale à la partie restante BG (N.C.1). D'autre part il a été démontré que BC est aussi égale à BG ; donc chacune des droites AL, BC est égale à BG ; or les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles (N.C.1) ; et donc AL est égale à BC.
Donc, au point A donné, est placée la droite AL, égale à la droite donnée BC. Ce qu'il fallait faire.

Autour de cette démonstration il nous a paru séduisant de mettre en place une petite axiomatique.
La démonstration de cette proposition II se fait avec **quatre définitions** :
1. Le point est ce dont il n'y a aucune partie ;
2. Un segment est une longueur sans largeur ;
3. Un cercle est une figure plane constituée d'une ligne unique, appelée circonférence, par rapport à laquelle tous les segments menés d'un point unique parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure jusqu'à la circonférence du cercle ont même longueur. Ce point est appelé centre du cercle ;
4. Parmi les figures trilatères, le triangle équilatéral est celle qui a les trois côtés égaux ; isocèle celle qui a seulement deux côtés égaux ; scalène celle qui a ses trois côtés inégaux.

Trois notions communes :
1. Les choses égales à une même chose sont égales entre elles ;
2. Si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux ;
3. Si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.

Trois demandes :
1. On petit tracer un segment unique d'un point à un autre point ;
2. On peut prolonger un segment en ligne droite ;
3. On ne peut tracer un cercle que si on connaît son centre et un segment rayon de ce cercle.

Enfin avec la Proposition I déjà citée :

« *Sur un segment donné, construire un triangle équilatéral.* »

L'examen de la démonstration de la proposition I permet de montrer la rigueur d'une démonstration euclidienne et ce que veut dire « démontrer » du point de vue euclidien. Cela fixe l'utilisation usuelle du compas qui n'est pas pérennisé avant la démonstration de la proposition II : **on ne peut tracer un cercle, donc reporter une longueur que si le centre et un point de la circonférence sont connus**. Cette exigence entraîne un travail de recherche intéressant pour construire un losange, une parallèle, un parallélogramme selon des données initiales fixées.

Deux activités ont commencé à être testées, l'une au niveau $4^{ème}$-$3^{ème}$-2^{de} et l'autre au niveau 2^{de}-$1^{ère}$ S[2]. Cela a permis d'aborder les points suivants : le parallélisme et les longueurs, ce qui est attendu lorsqu'en géométrie il est demandé de démontrer; l'examen d'un texte mathématique, d'une construction géométrique ... et aussi une faille dans cette rigueur. En effet Euclide n'a pas défini l'intersection de deux cercles alors que cette notion est nécessaire (cette faille a été remarquée très tardivement par les commentateurs d'Euclide ... un élève de seconde l'a remarquée.). En général les élèves s'investissent quel que soit leur niveau car le nombre d'éléments entrant dans les démonstrations et les constructions est limité et ceux-ci sont clairement identifiés.

[2] Les textes proposés pour ces activités sont intégralement publiés dans la LETTRE D'IINFORMATION N'l, IREM de Rennes (Campus de Beaulieu, avenue du général Lcclerc 35042 Rennes Cedex.)