En hommage à Pascal Quinton

IREM de Rennes, décembre 2017

Table des matières

Première partie

Présentation du dossier Pascal Quinton

Présentation

Avec ce dossier [1], l'IREM de Rennes rend hommage à Pascal Quinton, professeur au lycée de Bréquigny et membre très actif de l'IREM de Rennes pendant prés de 20 ans. Pascal a participé aux groupes ayant des thèmes d'histoire des mathématiques et à la rédaction collective de quatre des six fascicules *Faire des mathématiques à partir de leur histoire* (voir page 13).

Pascal a aussi participé aux activités de la Commission Inter-IREM d'histoire et d'épistémologie des mathématiques. C'est lui qui a proposé le thème de la rigueur pour le projet qu'elle a déposé en 2001. Notre groupe reçut le soutien de l'INRP pendant 4 ans.

Pascal suggéra que le travail du groupe de l'IREM de Rennes sur le thème de la rigueur s'intéresse aux fondements de la géométrie et à leur relation avec l'enseignement de la géométrie dans les classes de lycée [2]. Il regrettait beaucoup que notre enseignement de la géométrie dans les classes de lycée ne se pose pas beaucoup de questions sur l'enseignement des fondements de la géométrie, en particulier sur l'axiome des parallèles. Il pensait qu'on ne pouvait pas faire comme s'il n'y avait pas de problèmes.

Nous avons d'abord relu Euclide, puis nous en vînmes naturellement à nous intéresser aux géométries non euclidiennes et à lire en particulier les textes de Lobatchevski. Cette lecture difficile intéressait particulièrement Pascal.

Le point qu'il considérait comme central était celui des figures dans le modèle de Klein-Beltrami. C'est un modèle de géométrie hyperbolique ; il avait un grand plaisir, en augmentant sur son ordinateur le rayon du cercle contenant le modèle, à montrer que la géométrie devenait euclidienne sans que l'observateur puisse alors parier sur une géométrie plutôt qu'une autre.

Nos travaux ont été diffusé dans des stages, présentés dans des colloques ; notre travail sur les parallèles pouvait déboucher sur des textes plus ambitieux.

Malheureusement, le travail n'aboutit pas sur le plan national et nous n'avons pu alors continuer et mener à bout nos rédactions sur les géométries

1. Ce dossier a été réalisé par Jean-Pierre Escofier, avec l'aide de Gérard Hamon et Loïc Le Corre.

2. Nous nous sommes aussi intéressé à la rigueur en analyse, en étudiant, par exemple, des textes d'Euler ou Cauchy. Et puis nous avons eu la chance de travailler avec Hélène Grenapin et Anne Boyé, toutes deux de l'IREM de Nantes, sur la rigueur des manuels français de mathématiques des années 1900-1950, un petit bonheur, au milieu des pins qui entourent les bâtiments du lycée de La Baule.

euclidiennes[3]. Fin 2012, Pascal décida de mettre en forme ce qui avait été commencé et de rédiger ce qu'il pensait devoir être utile aux enseignants ; il accompagna son texte d'animations construites avec Geogebra. Je lui promis de les faire connaître ; je donne ici son travail tel quel (à quelques détails de présentation près). Il aurait souhaité y ajouter une partie plus mathématique et des compléments historiques plus développés ; c'était impossible de le faire sans lui.

À ces derniers textes de Pascal, j'ai ajouté un chapitre reprenant la rédaction d'un travail sur la mesure de la Terre.

3. Un aperçu de nos réflexions apparaît dans : *Fragments d'histoire des fondements de la géométrie plane*, 16e colloque Inter-IREM, Histoire et enseignement des mathématiques, Clermont-Ferrand, 2006.

Témoignage de Jeremy Longo avec Anne Ollivier

Pascal Quinton 10/04/1952 - 20/11/2013

« C'est le bon résultat. Ce n'est pas ça qu'on attend de vous, c'est élégant, mais tu n'expliques pas pourquoi. Je ne peux pas te donner les points. Mais cherche. Comprends pourquoi. Démontre. »

Cette phrase, Pascal Quinton me l'a dite à la fin d'un cours de math sur les statistiques, où ne comprenant pas les équations, j'avais fait pour un devoir une représentation graphique des résultats donnés par l'énoncé. J'y avais vu une beauté, une évidence. J'avais continué le dessin, qui m'avait donné les solutions suivantes. Autant dire que la solution était tout sauf académique.

Je n'étais pas un élève brillant. Pas mauvais, mais pas brillant.

De nombreuses fois, j'ai eu droit à des humiliations en règles de profs pour qui j'étais une insulte à leur discipline.

D'autres, je conserve un souvenir admiratif, et avec le recul, une sincère affection. Parmi eux figure Pascal Quinton.

1994, classe de seconde ; nous partons avec la classe et quatre professeurs en séjour à l'abbaye de Fontevraud.

J'ai un souvenir très précis de certains moments de ce séjour, bien que cela remonte à plus de vingt ans ; Mr Quinton nous faisant le jour tenter de mesurer par la géométrie la hauteur des cuisines de l'abbaye. Le soir venu, distillant tout en sobriété à nos oreilles d'ados en plein trip mystique quelques phrases comme : « il n'y a pas de paranormal, il n'y a que des choses normales qu'on n'a pas encore démontrées ».

Anne Ollivier en atelier photo dans la fraîcheur matinale du jardin à herbes.

Bernard (pardonnez-moi cher professeur d'avoir oublié votre nom) nous racontant le soir les anecdotes de son enfance et de son père qui disait « et après on ira tous à la pêche ! »avec son accent provençal, et son réveil à 4 heures du matin, car il aimait se lever tôt pour respirer un air que personne n'avait respiré avant lui.

Des souvenirs futiles, mais qui font partie de nous, nous construisent, nous définissent.

De nombreuses fois je me suis dit qu'il faudrait que je retourne les voir. Je n'ai jamais pris la peine de le faire. Après tout, je n'étais qu'un ancien élève parmi des centaines.

Et puis cet été, par un concours de circonstances, je me suis retrouvé de nouveau à Fontevraud, en week-end avec mon épouse. Balade le soir au milieu des jardins, et tant de souvenirs qui remontent.

De retour à l'hôtel, j'étais transporté vingt ans en arrière, et l'obsession étant ce qu'elle est, je me suis mis à rechercher frénétiquement les photos, les noms de mes professeurs, savoir ce qu'ils devenaient. Aucune trace de Bernard que j'admirais tant, qui m'a tellement donné le goût de la lecture, là où son prédécesseur nous en avait presque dégoûté ; Anne, que j'ai réussi à avoir par téléphone le lendemain, toujours aussi incroyablement dynamique, d'une force que je ne peux que souhaiter de tout mon cœur à ma fille.

Et à l'euphorie succéda le coup de massue, par cette simple phrase :

« Pascal QUINTON – Avis de décès »

Bien sûr, je me suis toujours souvenu de lui, de sa gentillesse, de son soutien à ses élèves. Jamais, jamais je ne l'ai vu ou entendu se moquer, dégrader, humilier un élève. Toujours pousser, porter ses élèves. Chercher le meilleur en eux, leur redonner confiance. Les pousser à s'améliorer constamment, à comprendre les mathématiques, et d'une certaine manière, à sa façon, la beauté de toute chose.

Je n'avais pas réalisé que d'apprendre son décès me toucherait autant. J'y pense maintenant. Souvent. Trop sans doute. Et à chaque fois avec une immense tristesse.

Ce n'était que mon professeur de maths, mais je réalise aujourd'hui à quel point ce qu'il m'a dit ce jour là a influencé ma vie, et contribué à faire de moi l'homme que je suis aujourd'hui.

« Cherche. Comprends pourquoi. Démontre. »

Curiosité, réflexion, ne pas se contenter d'un à peu près, mais comprendre.

Bien sûr, beaucoup de mes professeurs ont eu une influence sur ce que je suis aujourd'hui (même ceux qui nous ont humilié, moi et tellement d'autres, m'ont défini, en me permettant de savoir ce que je voulais ne jamais être).

Anne, que j'ai déjà cité, si dynamique, ne nous laissant jamais abandonner, nous poussant malgré nous, toujours avec bienveillance et détermination (vu mon niveau sportif, à ce stade c'est un sacerdoce). Catherine Ouedraogo, me voyant m'effondrer en larmes devant mes résultats en chute, et qui spontanément m'a proposé de me faire des cours de soutien pour m'aider à remonter la pente.

Ce prof de géo qui alors qu'il venait de perdre son fils est revenu au bout de deux jours, les yeux encore pleins de larmes, parce qu'il ne voulait pas pénaliser ses élèves.

Et d'autres que j'ai inévitablement oubliés.

Tous avaient ceci en commun d'aimer leurs élèves. De voir en eux plus qu'une contrainte et des adolescents imbéciles et immatures, mais une motivation, un devoir, une récompense. De les avoir intéressés à leurs disciplines, de les avoir fait grandir, progresser, devenir meilleurs.

La coïncidence fait que j'écris ceci deux semaines après les attentats de Paris. Et alors que je culpabilisais tant de ne pas être allé voir Pascal, pendant ce temps fleurissaient autour de nous des messages nous poussant à profiter du bonheur. Serrer ses enfants dans ses bras, sortir avec ses amis, dire à ses proches qu'on les aime.

J'ajouterai *dire merci tant que vous le pouvez.*

Alors merci Pascal, Anne, Bernard, Catherine, Michel, et tant d'autres.

Pascal, Monsieur Quinton, pardonnez-moi de ne pas être venu quand c'était possible.

A vous tous, chers professeurs, Merci. Avec toute ma gratitude et mon affection.

Adieu à Pascal Quinton, samedi 23 novembre 2013

Je parle au nom de l'IREM, l'Institut de Recherche sur l'enseignement des mathématiques de Rennes.

Permettez-moi de commencer par un souvenir personnel. J'ai connu Pascal en 1971, je crois, comme étudiant de seconde année dans le cours de Topologie et d'espaces métriques, le A1. Je me souviens de discussions, de sa facilité à comprendre. Il aimait les mathématiques. Il était motivé, excellent et avait visiblement un grand potentiel ; d'autres collègues s'en souviennent aussi.

C'est à l'IREM que j'ai pu vraiment travailler avec lui à partir de 1992. La participation de Pascal à la vie de l'IREM, aux groupes sur l'histoire des mathématiques organisés par l'IREM, a été essentielle, aussi bien pour le choix des thèmes de réflexion des groupes que pour le travail qu'il y a accompli.

Parmi ceux qui ont travaillé avec nous, je citerai Jean-Pierre Hairault, Gérard Hamon et Loïc Le Corre, mais bien d'autres collègues du secondaire nous ont rejoints une année ou une autre. Des liens d'amitiés se sont tissés au fil du temps.

Les principaux thèmes auxquels Pascal s'est intéressé sont les représentations en perspective en peinture, la mesure de la Terre, les mathématiques babyloniennes et, pour terminer, la géométrie hyperbolique. Ces sujets, et bien d'autres, l'ont passionné et les documents qu'il a publiés, seul ou avec d'autres, resteront parmi les réussites des IREM.

Pascal s'est énormément investi dans notre dernier travail, le problème des parallèles. Partant d'Euclide, nous sommes arrivés aux grands textes comme ceux de Lobatchevski ou Hilbert, qu'il a étudiés en détail. Le modèle de géométrie non euclidienne de Klein-Beltrami lui plaisait énormément. Il soulignait l'intérêt pédagogique de nos réflexions, aussi bien pour les élèves que pour les professeurs, et il a préparé plusieurs textes pour les expliquer. Tout cela lui tenait à cœur et nous en avons encore discuté longuement ensemble au cours de nos conversations de ces derniers jours.

Pascal aimait parler des mathématiques et il savait faire partager cette passion à ses élèves. Lors d'une de ses dernières interventions, un stage organisé par l'IREM et l'ENS de Rennes, nous avons encore vu changer le regard des élèves sur les mathématiques grâce à lui et à sa faculté d'empathie.

C'est le souvenir de cet attachement profond aux mathématiques et à ses élèves que nous garderons de lui.

Travaux de Pascal Quinton avec l'IREM de Rennes

Les travaux de l'IREM de Rennes en histoire des mathématiques ont été réalisés par des groupes de travail constitués d'enseignants du secondaire et d'un enseignant du supérieur (JP Escofier). La composition de ces groupes a varié d'une année à l'autre ; je citerais Jean-Pierre Hairault, Gérard Hamon et Loïc Le Corre. Pascal Quinton a participé aux groupes des années 1992-1994, 1995-1997, 2000-2001. 2003-2007. Les rédactions des travaux des différents groupes ont toujours pris un certain temps après la date administrative de clôture des groupes. Elles comportent des éléments d'histoire des mathématiques et de nombreuses propositions d'activités dans les classes, présentées de façon détaillée afin de faciliter le travail des enseignants. Elles ont été réalisées, en général, collectivement par les membres du groupe et forment les volumes II, III, IV, VI de la série *Faire des mathématiques à partir de leur histoire* dont voici les contenus.

Tome II : Les nombres de Babylone, la seconde proposition d'Euclide, l'algorithme d'Euclide, L'Algebra de Rafael Bombelli, Calcul de valeurs approchées de racines carrées, algèbre et géométrie avec Descartes, naissance de la perspective, probabilités des causes.

Tome III : ce volume est entièrement consacré au calcul des logarithmes, présentant en détail les travaux de Neper, Briggs, Euler.

Tome IV : ce volume est entièrement consacré aux tracés des caractères de l'imprimerie, depuis Albrecht Dürer jusqu'à Paul Bézier.

Tome VI : ce volume est entièrement consacré à la tablette babylonienne Plimpton 322.

Deuxième partie

Géométries non-euclidiennes

Avant-propos

Ma première rencontre avec les géométries non-euclidiennes a eu lieu en 1966.

J'étais alors élève de troisième et nous étions en train de démontrer que la somme des angles d'un triangle est égale à 180 degrés. Notre professeur, Monsieur Fléty, nous fit remarquer que cette démonstration reposait essentiellement sur l'axiome d'Euclide qu'il formulait ainsi : par un point donné, il passe une parallèle et une seule à une droite donnée. Il nous expliqua que cette propriété avait été jugée paradoxale par bon nombre de mathématiciens à qui une démonstration de cet axiome semblait nécessaire. Certains d'entre eux avaient tenté en vain de construire cette démonstration, et pour finir, de guerre lasse, s'étaient résolus à raisonner par l'absurde. N'aboutissant pas à la contradiction espérée, on avait formulé l'idée que plusieurs géométries cohérentes étaient possibles.

Je mentionne cet épisode de ma formation mathématique pour mémoire : elle n'a pas provoqué de révolution dans mon esprit, mais le fait que je m'en souvienne encore, 47 ans après, prouve que le ver était déjà dans le fruit.

À l'époque où j'étais au lycée, les programmes de mathématiques faisaient transition entre les mathématiques traditionnellement enseignées jusqu'alors et ce qui allait constituer les mathématiques « modernes ». Le programme de terminale constituait une synthèse de tout ce qui avait été appris au lycée. Après une rapide initiation à la théorie des ensembles, à partir des propriétés admises de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, on construisait les différents ensembles de nombres ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, la construction de $\mathbb{R}$ étant facultative). La géométrie était replacée dans le cadre de l'algèbre linéaire. Dans ce cadre, les droites avaient une véritable définition, et le parallélisme se comportait bien comme il le devait, si l'on faisait confiance aux *Éléments* d'Euclide. Le spectre des géométries non-euclidiennes s'éloignait.

Au cours de ma première année à l'université, les horaires de cours étaient relativement légers, de sorte qu'un étudiant désireux de réfléchir au contenu de ce qu'on lui enseignait, pouvait le faire sans pour autant s'abrutir. Le premier chapitre de ce cours de première année consistait en un bref cours de logique. Il m'a laissé sur ma faim, et le chapitre de logique du *Cours d'algèbre* de Roger Godement (un excellent livre et un auteur fameux, pourtant) ne m'a pas plus convaincu. Pour finir, je me suis plongé dans la lecture de la *Logique mathématique* de Stephen Cole Kleene. J'y ai appris beaucoup de choses et je me suis initié à la méthode axiomatique. Aucun livre de mathématiques ne m'a passionné autant que ce livre de Kleene.

Ma deuxième rencontre avec les géométries non-euclidiennes a eu lieu en 1974, dans des conditions assez cocasses. Comme j'étais fraîchement titulaire d'une licence, j'avais accès à l'étage du bâtiment qui abritait la bibliothèque universitaire. Cet endroit était un vrai désert et on y avait une paix royale.

À force d'y fouiner, je suis tombé sur deux opuscules intitulés respectivement *Cantor a tort* et *Vive Euclide*, dans lesquels l'auteur, un certain G. Métrios, prenant le contre-pied de deux célèbres exclamations de Jean Dieudonné, s'efforçait de démontrer que les idées de Poincaré sur la géométrie hyperbolique d'une part, et celles de Cantor sur l'existence de plusieurs types d'ensembles infinis d'autre part, étaient fausses. Mais pour prouver ses dires, Métrios s'était trouvé dans l'obligation d'exposer les démonstrations de Cantor, d'une part, de Poincaré d'autre part. C'était pour moi la première fois que je voyais une démonstration de la consistance de la géométrie hyperbolique (celle de Lobatchevski) relativement à la géométrie euclidienne. En plus clair, si la géométrie euclidienne est sans contradiction, celle de Lobatchevski est, elle aussi, sans contradiction. Au bout du compte, la lecture du livre de Métrios [4] a abouti pour moi à la conviction qu'il y avait bien plusieurs géométries cohérentes possibles. Il ne restait plus qu'à les étudier et à étudier les rapports qu'elles pouvaient entretenir.

Mais auparavant, j'ai effectué quelques détours par l'étude de l'histoire des mathématiques.

J'ai eu la chance de travailler sur l'histoire des mathématiques dans le cadre des IREM [5], d'abord au Mans, avec Évelyne Barbin, puis à Rennes, avec Jean-Pierre Escofier. Au Mans, le travail se limitait à la lecture de certains textes anciens, mais pas n'importe lesquels : *Tractatus de configurationibus qualitatum et motum* de Nicole Oresme, *Dialogue concernant deux sciences nouvelles* de Galilée, quelques extraits des œuvres de Fermat, la *Géométrie* de Descartes, etc. Le travail à Rennes était d'un autre ordre. Il s'agissait d'élaborer des activités pour les élèves, activités s'inscrivant dans le cadre des programmes en vigueur dans les classes, mais basées sur des textes

4. Je n'ai jamais réussi à avoir des précisions sur cette personne.
5. Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

anciens. Le groupe chargé de ce travail a vu sa composition évoluer au fil du temps. Ces différents groupes ont élaboré et publié plusieurs brochures intitulées *Faire des mathématiques à partir de leur histoire*, en tout six brochures.

Lorsque la commission inter-IREM d'histoire et d'épistémologie a demandé aux différents IREM de faire des propositions pour un thème commun à tous les IREM, le groupe de Rennes a proposé comme thème « l'histoire de la rigueur en mathématiques ». Il a décidé de travailler pour sa part sur l'histoire des fondements de la géométrie. Dans le cours de notre travail, beaucoup de choses ont été entreprises, mais au final, il n'y a eu qu'une seule publication, éditée conjointement par l'IREM de Clermont-Ferrand et l'INRP[6], sous forme d'un article constitué de deux parties, l'une intitulée *À propos de l'axiomatisation de la géométrie dans les Élements d'Euclide* et l'autre *Antoine Arnauld : rigueur et enseignement au XVIIe siècle*.

Au cours de différents stages de formation continue destinés aux enseignants des lycées et collèges et que j'ai animés en compagnie de Jean-Pierre Escofier, il m'est arrivé de constater que certains enseignants du secondaire ignoraient jusqu'à l'existence de géométries non-euclidiennes. Pour eux, le caractère expérimental de la géométrie ne faisait aucun doute. Il me semble qu'il serait utile que, pour de futurs enseignants de mathématiques de l'enseignement secondaire, la géométrie soit replacée dans le cadre axiomatique qui est le sien. L'étude de l'histoire des fondements de la géométrie pourrait y aider. Compte tenu du faible temps qui m'est imparti, je ne pourrais pas écrire plus qu'un brouillon. D'autres que moi, s'ils le souhaitent, pourront s'en servir pour écrire proprement toutes ces choses.

6. Institut National de Recherche Pédagogique.

Chapitre 2

Les Éléments d'Euclide

On lit parfois qu'avec les *Éléments*, le principal ouvrage d'Euclide, la méthode axiomatique est inventée et qu'à part quelques oublis et quelques recours intempestifs à l'évidence, il n'y a rien à redire à la rédaction de ce texte. Dans ce qui suit, à partir du texte d'Euclide [1], on se propose d'examiner d'un peu plus près le fonctionnement de la méthode utilisée dans les *Éléments*.

2.1 Le contexte mathématique des Éléments d'Euclide

Une des sources les plus importantes dont nous disposons concernant les *Éléments* est un ouvrage de Proclus, écrit au cinquiéme siècle de notre ère, intitulé *Commentaires sur le premier livre des éléments d'Euclide*.

Proclus est de beaucoup postérieur à Euclide. On pense qu'il a vécu entre les années 412 et 485 [2], alors qu'on situe Euclide, selon Proclus lui-même, aux alentour de l'an - 300 (il y a donc un décalage de l'ordre de 700 ans entre la rédaction des *Éléments* et celle des *Commentaires* de Proclus). Cependant Proclus dispose de textes dont il donne les titres et les auteurs, mais qui nous sont aujourd'hui inaccessibles. C'est une des raisons pour lesquelles ses *Commentaires* sont précieux.

Proclus situe l'activité d'Euclide à Alexandrie, « sous le premier Ptolémée », donc entre - 305 et - 283. Il parcourt rapidement l'histoire des mathématiques avant Euclide, et cite plusieurs auteurs d'*Éléments* antérieurs

1. Dans la traduction de Bernard Vitrac.
2. Maurice Caveing, introduction à la traduction des *Éléments* d'Euclide par Bernard Vitrac.

à ceux d'Euclide. Parlant de ce dernier, il écrit ceci [3] : *En rassemblant des Éléments, il en a coordonné beaucoup d'Eudoxe [4], perfectionné beaucoup de Théétète [5], et a évoqué dans d'irréfutables démonstrations ceux que ses prédécesseurs avaient montré d'une manière relâchée.* On voit donc qu'avant Euclide, d'autres que lui ont tenté d'écrire des ouvrages du même genre. De toutes ces tentatives, la plus satisfaisante a été celle d'Euclide, du moins au dire de Proclus et ainsi les *Éléments* d'Euclide sont les seuls à avoir été recopiés et conservés.

Proclus détaille plusieurs raisons d'admirer le texte d'Euclide. Proclus nous dit qu'*on l'admirera pour l'ordre et le choix des théorèmes pris comme éléments ; car il n'a pas admis tous les éléments qu'il pouvait recueillir, mais bien ceux qui étaient susceptibles d'instruire dans les premiers principes de la géométrie. On admirera en plus ses modes variés de raisonnements qui font foi, tantôt en partant des causes, tantôt en émanant de preuves, mais qui sont tous incontestables, exacts et appropriés à la science (...) Mentionnons finalement la continuité des inventions, la répartition et l'ordre des prémisses et des conséquences, ainsi que le talent avec lequel chacune de ces réciproques est présentée* [6].

Un peu plus loin, Proclus explique ce qu'est le but d'un ouvrage intitulé *Éléments* [7] ou encore *Enseignement des éléments* [8]. On peut donner deux sens au mot *élément*.

On dira par exemple que, dans le livre 1, la proposition 1 (*Sur une droite limitée donnée, construire un triangle équilatéral*) est un élément de la proposition 2 (*Placer, en un point donné, une droite égale à une droite donnée*), puisqu'en effet la démonstration de la proposition 2 s'appuie sur la proposition 1, et la proposition 4 (un des cas d'« égalité »de triangles) est un élément de la proposition 5 (*Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux entre eux et si les deux droites égales sont prolongées sous la base, les angles sous la base sont égaux entre eux*) [9].

Mais on dira aussi qu'une demande (on dit aussi un postulat) est un

3. Proclus, *Commentaires sur le premier livre des éléments d'Euclide*, page 61 dans la traduction de Paul Ver Eecke.

4. Mathématicien contemporain de Platon, qu'il faut donc situer au début du quatrième siècle avant notre ére.

5. Mathématicien lui-aussi contemporain de Platon.

6. Proclus, *Commentaires sur le premier livre des Élements d'Euclide*, page 62-63 dans la traduction de Paul Ver Eecke.

7. stoïkhéïa, si l'on en croit le dictionnaire de Charles Alexandre, publié en 1850.

8. stoïkhéïosis.

9. Ces deux exemples sont empruntés à Proclus, pages 65-66.

élément, puisque c'est l'un des principes premiers de l'ouvrage. Il en va de même des autres principes premiers (les notions communes, également appelées axiomes, et les définitions). Proclus conclut : *Il est difficile de recueillir avec choix et de coordonner convenablement pour chaque science les éléments dont tous les autres procèdent et en présence desquels ces autres choses s'expliquent. Et parmi ceux qui ont entrepris de le faire, les uns ont pu en rassembler beaucoup, d'autres un petit nombre. Les uns ont fait usage de démonstrations plus brèves, d'autres ont étendu leurs spéculations en longueur infinie ; certains ont choisi la méthode par l'impossible*[10]*, d'autres la proportion (...) On trouvera que l'enseignement des Éléments d'Euclide l'emporte sur les autres*[11].

2.2 Les principes premiers du livre 1 des *Éléments*

2.2.1 La structure du traité d'Euclide

Les *Éléments* forment un traité divisé en treize livres. Chacun de ces livres comporte des énoncés liminaires (définitions, demandes, notions communes), puis des propositions accompagnées de leurs démonstrations. Les énoncés liminaires (principes premiers) sont des énoncés qui ne font l'objet d'aucune démonstration. Dans le livre 1, il y a 23 définitions, 5 demandes [12] et 9 notions communes [13]. Dans d'autres livres constitutifs des *Éléments*, il peut n'y avoir aucune notion commune, et aucune demande : c'est le cas du livre 2, qui est constitué de deux définitions et de 14 propositions.

Dans certaines traductions, les demandes et les notions communes sont regroupées dans la même rubrique : Henrion, dans son édition de 1632, énonce ainsi 20 *pétitions ou demandes*. Néanmoins, les mots utilisés dans le texte grec pour les demandes d'une part, les notions communes d'autre part, sont différents. Il convient donc de les traduire par des mots différents et de s'interroger sur la nuance qu'il peut y avoir en ce qui concerne leur statut (faut-il les démontrer ? faut-il les admettre ?)

10. La démonstration par l'absurde.
11. pages 66-67.
12. aïtémata.
13. koïnaï ennoaï, l'adjectif koïvos signifiant commun, voire même trivial ou vulgaire.

2.2.2 La logique d'Aristote et les Éléments d'Euclide

En ce qui concerne ces principes premiers, nous suivrons plutôt Aristote que Proclus [14]. Aristote, bien qu'antérieur à Euclide, est plus proche dans le temps d'Euclide que de Proclus. Il a en effet vécu de 384 à 322 av.J.-C. Son oeuvre est immense et touche à de nombreux domaines : physique, biologie, astronomie, philosophie, etc. Il n'était sans doute pas mathématicien, contrairement à Platon [15], dont il a pourtant été disciple pendant près de 20 ans. Néanmoins, Aristote connaissait assez de mathématiques pour leur emprunter un grand nombre d'exemples lorsqu'il a écrit l'un des plus anciens traités de logique connus, l'*Organon* [16] composé de plusieurs traités : *Catégories, De l'Interprétation, Premiers Analytiques, Seconds Analytiques, Topiques, Réfutations Sophistiques* auxquels certains ajoutent la *Rhétorique* et la *Poétique.* Le tout forme un ensemble imposant, d'une lecture difficile car extrêmement concis, voire même elliptique.

Les *Seconds Analytiques* constituent le noyau dur de l'*Organon.* Aristote y traite des principes premiers et de la construction du savoir à partir de ces principes. Ils s'ouvrent sur une affirmation vigoureuse : *Tout enseignement donné ou reçu par la voie du raisonnement vient d'une connaissance préexistante.*

La chose n'allait pas de soi à l'époque, puisque certains soutenaient l'opinion selon laquelle toute vérité était démontrable, tandis que d'autres prétendaient au contraire que rien n'était démontrable et que, par conséquent, il n'existait aucune connaissance, de quelque nature que ce soit, dont on puisse déduire quoi que ce soit. Aristote règle leur compte aux uns comme aux autres dans le chapitre 3 des *Seconds Analytiques.*

Aristote précise, à propos de ces connaissances préexistantes, qu'il y en a de plusieurs sortes : *Tantôt, ce qu'on doit présupposer, c'est que la chose est ; tantôt, c'est ce que signifie le terme employé qu'il faut comprendre ; tantôt, enfin, ce sont les deux à la fois* [17].

Il donne quelques exemples : *Dire que, pour toute chose, la vérité est dans l'affirmation ou dans la négation, c'est poser que la chose est ; d'autre part, nous posons que triangle signifie telle chose ; enfin, s'il s'agit de l'unité, nous*

14. Conformément au judicieux conseil formulé par Maurice Caveing dans son introduction à la traduction des *Éléments* d'Euclide par B. Vitrac.

15. Non seulement Platon possédait des compétences en mathématiques, mais il était entouré de mathématiciens de haute volée (Eudoxe, Ménechme, etc).

16. Outil, outil de travail (dictionnaire Grec-Français, Charles Alexandre, onzième édition, 1850)

17. Seconds Analytiques, I, 1. traduction de Jules Tricot

posons à la fois les deux choses, à savoir le sens du nom et l'existence de la chose[18].

On a là un échantillon de la prose d'Aristote, et le moins qu'on puisse dire est que tout n'est pas clair dans ce qui est écrit là. Dans le premier membre de la première phrase, le mot *chose* est utilisé deux fois, et pour désigner des *choses* différentes. Il semble bien que dans l'expression *pour toute chose, la vérité est dans l'affirmation ou dans la négation* le mot *chose* désigne une affirmation A, à partir de laquelle on formule une deuxième affirmation B qui est : « l'une des affirmations : l'affirmation A, l'affirmation *non* A, est vraie ». En affirmant que « pour toute affirmation A, l'affirmation B est vraie », on pose l'existence de cette dernière proposition (qui n'est autre que le principe du tiers exclu). L'*existence* dont parle Aristote peut donc concerner une affirmation ; en poser l'existence revient à dire qu'elle est vraie.

Par contre, concernant le mot *triangle*, il suffit de donner la signification de ce mot. Ce n'est d'ailleurs pas si simple que cela à faire. Dans le livre 1 des *Éléments*, Euclide définit d'abord la notion de figure *trilatère* dans le cadre plus général de la définition 19 : *les figures rectilignes sont les figures contenues par des droites ; trilatères celles contenues par trois droites, quadrilatères par quatre, multilatères par plus de quatre*. Puis, dans la définition 20, le mot *triangle* apparaît pour la première fois, mais toujours accompagné d'un adjectif : on définit ainsi les triangles équilatéraux, isocèles, scalènes d'une part, rectangles, obtusangles et acutangles d'autre part. Ceci dit, Aristote a raison de souligner que l'existence de ces figures n'est pas posée. Elle est démontrée, pour la plupart des figures au fil du livre 1 (proposition 1 pour le triangle équilatéral, par exemple)[19].

Le troisième exemple d'Aristote n'est pas bien clair. Un peu plus loin dans les *Seconds Analytiques*[20], Aristote livre la définition de l'unité à laquelle il se réfère : *(...) en Arithmétique, on pose que l'unité, c'est ce qui est est indivisible selon la quantité*, mais il n'est pas question ici d'existence et, d'ailleurs, c'est cet exemple de définition que reprend plus loin Aristote pour expliquer que les définitions ne sont pas des hypothèses.

À lire Aristote, on voit donc que les principes premiers sont de deux sortes : d'une part, ceux qui posent la signification d'un terme et, d'autre part, ceux qui posent l'existence de quelque chose (un objet, une affirmation vraie). Ceux qui posent la signification d'un terme sont des *définitions*, les

18. Seconds Analytiques, I, 1. traduction de Jules Tricot

19. On notera que la proposition 1 du livre 1 ne prouve pas l'existence de triangles isocèles, puisque les définitions 1 et 2 impliquent qu'un triangle équilatéral n'est pas isocèle.

20. *Seconds Analytiques*, I.2, traduction de Jules Tricot

autres sont de deux sortes et c'est ce qui explique la distinction entre les *notions communes*[21] et les *demandes*[22].

2.2.3 Les Axiomes

Pour comprendre la différence entre les *notions communes* et les *demandes*, il faut remonter un peu dans le raisonnement d'Aristote.

Dans les *Premiers Analytiques*, Aristote étudie les différentes formes de syllogismes. Le syllogisme est le moteur de la connaissance : partant de prémisses, il permet de démontrer de nouvelles propriétés. Aristote écrit ceci : *ce que nous appelons ici savoir, c'est connaître par le moyen de la démonstration. Par démonstration, j'entends le syllogisme scientifique.*

Mais au départ, nous l'avons dit, il est nécessaire de formuler un certains nombres de principes qui doivent remplir un certains nombres de conditions : ces principes doivent être, entre autres choses, vrais, indémontrables, ils doivent être les causes de la conclusion. Aristote distingue parmi ces principes immédiats les *axiomes* des *thèses* : *J'appelle un principe immédiat du syllogisme une thèse, quand, tout en n'étant pas susceptible de démonstration, sa connaissance n'est pas indispensable à qui veut apprendre quelque chose ; si, par contre, sa connaissance est indispensable à qui veut apprendre quoi que ce soit, c'est un axiome.*

Les *axiomes*, tels que les décrit Aristote, correspondent assez bien aux *notions communes* d'Euclide. Communes, ces notions le sont en deux sens. D'une part, elles sont évidentes, au point d'être triviales (le qualificatif grec utilisé est *koïnos*, qui, si l'on en croit le dictionnaire de Charles Alexandre, peut avoir une connotation péjorative). D'autre part, elles sont communes à toutes les sciences, mais avec des nuances : il s'agit, nous dit Aristote, d'une *communauté d'analogie, étant donné que leur usage est limité au genre tombant sous la science en question. Les principes propres sont, par exemple, les définitions de la ligne droite et du droit ; les principes communs sont des propositions telles que : si, de choses égales, on ôte des choses égales, les restes sont égaux*[23]*. Mais l'application de chacun de ces principes communs est limité au genre dont il s'agit, car il aura la même valeur, même s'il n'est pas employé dans toute sa généralité, mais appliqué, en Géométrie par exemple, aux grandeurs seulement ou, en Arithmétique, aux nombres seulement.*

21. Ou axiomes.
22. Ou postulats.
23. Cette notion commune, donnée en exemple dans le texte d'Aristote se retrouve, mot pour mot, comme notion commune 3 dans le livre 1 des *éléments d'Euclide*

Voici les notions communes énoncées par Euclide dans le livre 1 des *Éléments.*

1. Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.

2. Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.

3. Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.

4. Et si, à des choses inégales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont inégaux.

5. Et les doubles du même sont égaux entre eux.

6. Et les moitiés du même sont égales entre elles.

7. Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.

8. Et le tout est plus grand que la partie.

9. Et deux droites ne contiennent pas une autre.

On sera parfois surpris de l'usage de ces notions communes dans les *Éléments*. Derrière ces affirmations qui semblent effectivement triviales se cachent des idées très différentes de celles qu'une lecture un peu distraite pourrait suggérer et qui se résumerait pour la notion commune 2 par exemple à l'implication

$$(A = B \text{ et } C = D) \Longrightarrow A + C = B + D.$$

Dans la démonstration de ce que l'on appelle de nos jours « théorème de Pythagore » et qui constitue la proposition 47 du livre 1, ces notions communes sont abondamment utilisées (voir figure 2.1). Euclide montre l'égalité des triangles ABE et FBC, il en déduit l'égalité de leurs doubles. Mais il se trouve que ces doubles sont respectivement égaux aux parallélogrammes $BELM$ et $AGFB$. Ainsi, ce parallélogramme $BELM$ est égal au carré $AGFB$. On montre de même que le parallélogramme $CMLD$ est égal au carré $ACHK$. La notion commune 2 permet de conclure : le carré $BEDC$ est égal à la somme des parallélogrammes $BELM$ et $CMLD$, donc à la somme des carrés $AGFB$ et $ACHK$.

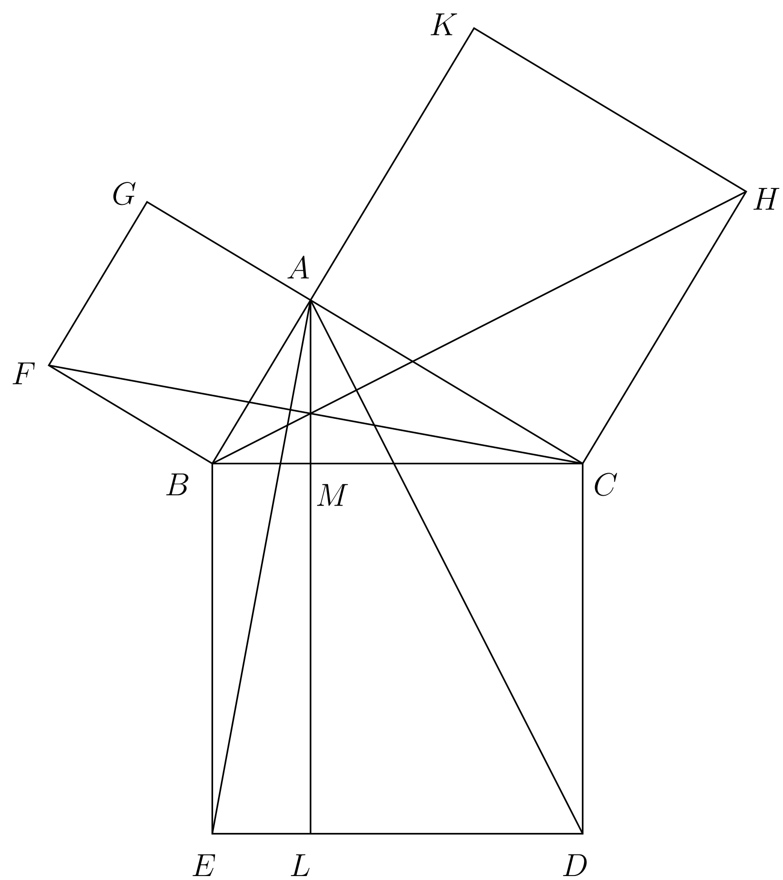


Figure 2.1 – Le théorème de Pythagore.

On remarquera que les triangles, les parallélogrammes sont traités comme des grandeurs, qu'on pourrait assimiler à leur aire, à ce « détail » près que les grandeurs qu'ajoute ou retranche Euclide ne sont pas des nombres, mais des objets nettement plus compliqués. Les notions communes n'ont pas vraiment, pour le lecteur moderne, le caractère d'évidence auquel il aurait pu s'attendre.

2.2.4 Les définitions

Aristote, aprés avoir distingué dans les principes premiers, les *thèses* des *notions communes*, distingue de nouveau dans les *thèses*, deux types d'énoncés : ceux qui portent sur la signification de certains termes (ce sont les définitions) et les autres (qui portent sur l'existence de choses) et qu'il appelle *hypothèses*.

Il donne l'exemple suivant *La définition est une thèse, puisque, en Arithmétique, on pose que l'unité, c'est ce qui est indivisible selon la quantité ; mais ce n'est pas une hypothèse, car définir ce qu'est l'unité et affirmer l'existence de l'unité, ce n'est pas la même chose.*

Lorsqu'on examine les 23 définitions du livre I des *Éléments*, on est un peu surpris. Dans ces 23 définitions, 30 termes sont définis : le point, la ligne, la ligne droite, la surface, le plan, les figures, etc. Ces définitions ne sont pas opératoires : il est impossible de s'assurer qu'une ligne est une droite en s'appuyant dans une démonstration, sur la définition d'une droite : *une ligne droite est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elles.*

Bernard Vitrac, en annexe de sa traduction des *Éléments*, donne les schémas déductifs de la plupart des 13 livres des *Éléments*. Seules les définitions 10, 15, 20, 22 et 23 sont utilisées dans les démonstrations des 48 propositions qui constituent ce livre 1. Elles définissent respectivement l'angle droit et la perpendicularité (définition 10), le cercle (définition 15), les triangles équilatéraux, isocèles, scalènes [24] (définition 20), les différents quadrilatères (carrés, etc.) et le parallélisme (définitions 23). Ainsi, sauf exception, les définitions, au sens d'Euclide, qui ne sont guère plus que des descriptions d'objets géométriques usuels, ne sont pas utilisés du tout comme le sont les définitions utilisées dans les ouvrages mathématiques actuels.

Il est vrai que nos élèves de lycée ont tendance à raisonner plutôt à la manière d'Euclide, du moins en ce qui concerne l'usage des définitions : un élève de terminale aura énormément de mal à utiliser la définition du nombre dérivé d'une fonction en un point pour étudier la dérivabilité de cette fonction

24. Les triangles dont les trois côtés ont trois longueurs différentes.

en un point qui pose problème (par exemple, la dérivabilité de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^3}$ en 0).

2.2.5 Les demandes

La dernière distinction qu'effectue Aristote, concerne les *hypothèses*. Il s'agit là d'énoncés dont il faut admettre qu'ils sont vrais. Ici entrent en scène, sans crier gare, deux personnages : le « maître » et l'« élève ». Parmi ces énoncés dont il faut admettre la vérité (faute de quoi l'édifice bâti par le « maître » s'effondre), certains reçoivent l'assentiment de l'« élève ». On utilisera donc ces énoncés, sans même les mentionner. D'autres sont contestés par l'« élève » : ce sont eux qu'on appelle *demande*. Sous réserve que ces *demandes* soient vraies, tout le reste de l'édifice que constituent les éléments sera vrai. Ces *demandes* sont donc en attente de vérification, soit par une démonstration, auquel cas ces demandes deviendront des propositions, soit par une vérification expérimentale. Ces *demandes* ont en mathématiques un rôle analogue aux principes de la physique. Ces principes, à partir desquels sont construites des théories physiques (mécanique, électrostatique, par exemple), sont tenus pour vrais jusqu'à ce qu'une de leurs conséquences logiques soit expérimentalement infirmée.

Dans le livre 1 des Éléments, les *demandes* énoncées sont au nombre de cinq. Les voici.

1. Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.
2. Et de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée.
3. Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle.
4. Et que tous les angles droits soient égaux entre eux.
5. Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.

La définition 3, compte tenu de la proposition 2, doit se comprendre de la façon suivante : étant donnés deux points A et B (voir la partie gauche de la figure 2.2), on peut tracer le cercle de centre A passant par B (voir la partie droite de la figure 2.2).

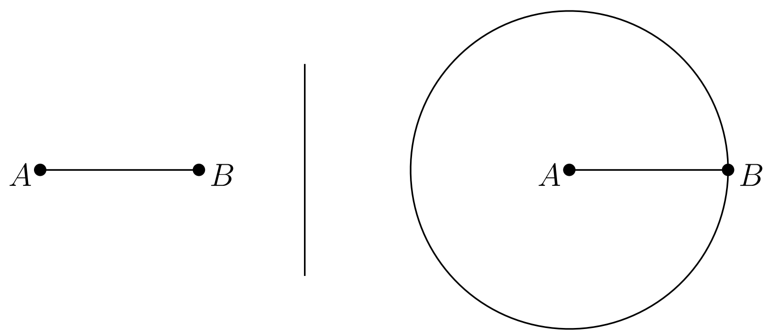


FIGURE 2.2 – La demande 3.

La proposition 2 est un problème : placer, en un point donné, une droite égale à une droite donnée (voir la figure 2.3). Avec le résultat de la proposition 2 et la demande 3, il devient possible de construire un cercle de centre donné et de rayon donné.

Il y a là une petite coquetterie de la part d'Euclide. La démonstration de la proposition 2 du livre 1 des *Éléments* est particulièrement ingénieuse. Elle mérite d'être lue [25].

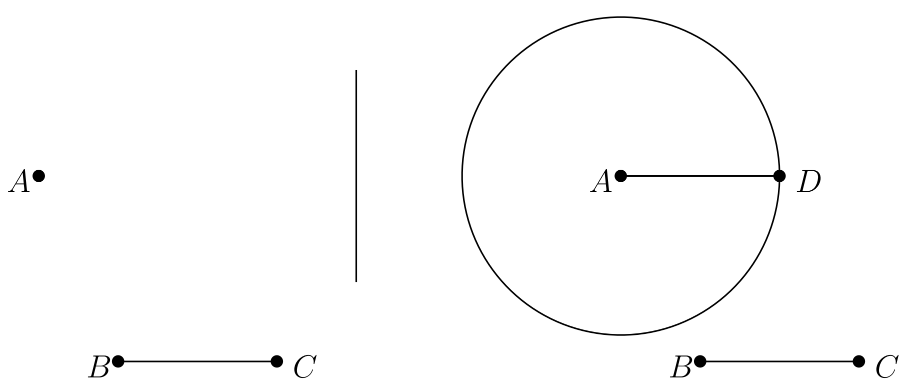


FIGURE 2.3 – La proposition 2 : $AD = BC$.

25. L'IREM de Rennes a consacré une activité, basée sur cette proposition et destinée aux élèves depuis la quatrième jusqu'à la seconde, qui est publiée dans le tome 2 de la collection de brochures intitulées *Faire des mathématiques à partir de leur histoire*. Il faut commencer par construire, ce que la proposition 1 permet de faire, un triangle équilatéral de côté AB.

La cinquième demande est équivalente à ce qu'on a pris l'habitude d'appeler *Postulat d'Euclide* que nous nous proposons d'étudier un peu plus en détail.

2.3 La théorie des parallèles dans les *Éléments* d'Euclide

Dans les principes premiers du livre 1 des *Éléments*, deux énoncés et deux seulement concernent le parallélisme : la définition 23 et la demande 5. La définition 23 est ainsi énoncée : *Des droites parallèles sont celles qui étant dans le même plan et indéfiniment prolongées de part et d'autre, ne se rencontrent pas, ni d'un côté, ni de l'autre*. La demande 5 a été énoncée ci-dessus. Le premier énoncé utilisant le qualificatif *parallèle* ou l'un de ses dérivés est celui de la proposition 27. Les énoncés concernant le parallélisme des droites dans le plan sont ceux des propositions 27 à 31, la proposition 30 correspondant à ce que nous appellerions la transitivité du parallélisme : *les parallèles à une même droite sont aussi parallèles l'une à l'autre*.

Ce que l'on appelle axiome d'Euclide est un problème qui constitue la proposition 31 : *Par un point donné, mener une droite parallèle à une droite donnée.* Il est à noter cependant que l'unicité de cette parallèle n'est pas mentionnée, encore moins démontrée. La proposition 32 concerne les angles d'un triangle : *Dans tout triangle, un des côtés étant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés, et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits* (voir la figure 2.4).

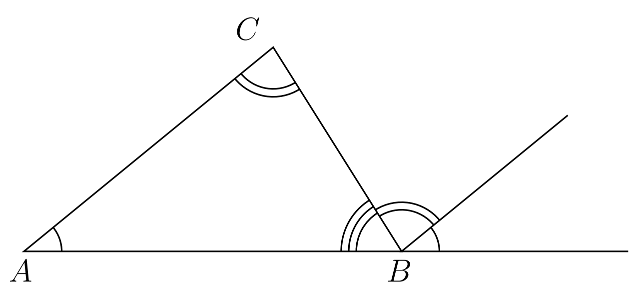


FIGURE 2.4 – La somme des angles d'un triangle.

Les résultats obtenus sur les parallèles conduisent à étudier les parallélogrammes, puis à énoncer diverses propriétés concernant les aires des parallélogrammes et des triangles. On voit ainsi (voir la figure 2.5) que *Les parallélogrammes qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux* (proposition 35), ce qu'illustre la figure ci-dessous, ou les droites (AF) et (BC) sont parallèles, si bien que les parallélogrammes $ABCD$ et $BCFE$ ont la même aire :

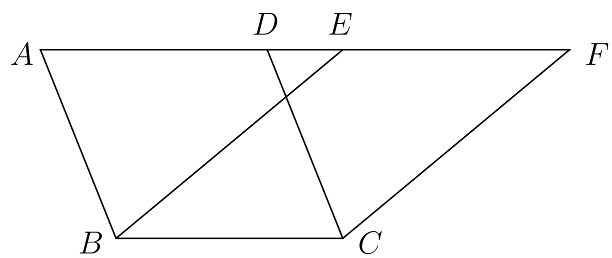


FIGURE 2.5 – Parallélogrammes sur la même base et dans les mêmes parallèles.

On voit ensuite que *Les parallélogrammes qui sont sur des bases égales et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux* (voir la figure 2.6).

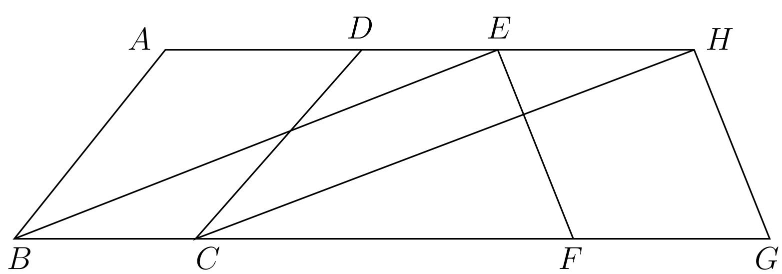


FIGURE 2.6 – Parallélogrammes de bases égales et dans les mêmes parallèles.

Les droites (AH) et (BG) étant parallèles, les longueurs BC et FG étant égales, les aires des parallélogrammes $ABCD$ et $EFGH$ sont alors égales.

Les propositions suivantes énoncent entre autres des résultats analogues concernant des triangles compris entre deux parallèles. Euclide se dote ainsi d'outils lui permettant d'obtenir des « égalités » de figures, un exemple frappant étant celui du théorème de Pythagore (proposition 47, voir page27).

2.4 Les démonstrations dans les *Éléments*

2.4.1 Syllogismes

En règle générale, les démonstrations d'Euclide fonctionnent à peu près comme les nôtres. En s'appuyant sur les propositions précédemment démontrées ou admises (axiomes, notions communes), et au moyen des règles de raisonnement usuelles (basées sur les syllogismes décrits par Aristote dans les premiers analytiques), Euclide aboutit à la conclusion annoncée dans la proposition qu'il a énoncée. À l'exception du langage utilisé et peut-être du luxe de détails avec lequel les démonstrations sont menées, on croirait lire un manuel scolaire tel qu'il aurait pu être écrit au dix-neuvième siècle, voire même au début du vingtième siècle. La démonstration de la proposition 13 est assez typique. La voici.

Proposition 13

Si une droite élevée sur une droite produit des angles, elle produira deux angles soit droits, soit égaux à deux droits[26] (voir la figure 2.7).

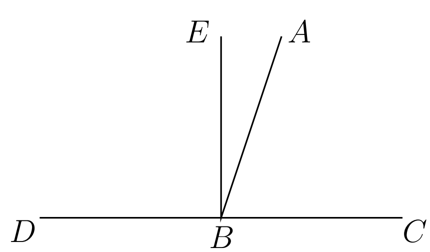


FIGURE 2.7 – La proposition 13.

26. $\widehat{CBA} = \widehat{ABD} = 90°$ ou $\widehat{CBA} + \widehat{ABD} = 180°$

En effet, qu'une certaine droite AB élevée sur la droite CD produise des angles sous CBA, ABD.

Je dis que les angles sous CBA, ABD sont soit deux droits, soit égaux à deux droits.

Or, d'une part, si celui sous CBA est égal à celui sous ABD, ils sont tous deux droits (définition 10)[27]*. Sinon, que EB soit menée à angle droit avec CD à partir du point B (proposition 11)*[28]*. Donc ceux sous CBE, EBD sont deux droits ; et puisque celui sous CBE est égal aux deux sous CBA, ABE, que celui sous EBD soit ajouté de part et d'autre. Donc ceux sous CBE, EBD sont égaux aux trois sous CBA, ABE, EBD (notion commune 2). Ensuite, puisque celui sous DBA est égal aux deux sous DBE, EBA, que celui sous ABC soit ajouté de part et d'autre. Donc ceux sous DBA, ABC, sont égaux au trois sous DBE, EBA, ABC (notion commune 2).*

Et il a été démontré aussi que ceux sous CBE, EBD sont égaux aux trois mêmes. Or les choses égales à une même chose sont égales entre elles (notion commune 1). Et donc ceux sous CBE, EBD sont égaux à ceux sous DBA, ABC. Mais ceux sous CBE, EBD sont deux droits. Et donc ceux sous DBA, ABC sont égaux à deux droits.

Donc si une droite élevée sur une droite produit des angles, elle produira soit deux angles droits, soit deux angles égaux à deux droits.

Ce qu'il fallait démontrer.

L'usage des notations actuelles nous permettrait de réduire cette démonstration dans d'importantes proportions, mais on appréciera le soin apporté à la rédaction de cette démonstration.

Cependant, les choses ne sont pas toujours aussi nettes.

2.4.2 L'évidence comme outil de démonstration

Examinons par exemple la proposition 1 du livre 1 accompagnée de sa démonstration.

Proposition 1

Sur une droite limitée donnée, construire un triangle équilatéral. Soit AB la droite limitée donnée.

Il faut construire un triangle équilatéral sur la droite AB.

27. Définition 10 : quand une droite ayant été élevée sur une droite fait apparaître les angles adjacents égaux, chacun de ces angles égaux est droit.

28. Proposition 11 : Mener une ligne droite à angles droits avec une droite donnée, à partir d'un point donné sur celle-ci.

Que du centre A et au moyen de l'intervalle AB soit construit le cercle BCD (demande 3) et qu'ensuite du centre B et au moyen de l'intervalle BA soit décrit le cercle ACE (demande 3), et que du point C auquel les cercles s'entrecoupent soient jointes les droites CA, CB jusqu'au points A, B (demande 1) (voir la figure 2.8).

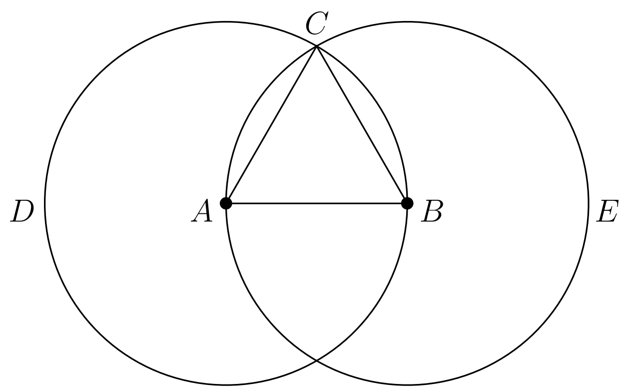


FIGURE 2.8 – La proposition 1 : construction d'un triangle équilatéral.

Et puisque le point A est le centre du cercle du cercle CDB, AC est égale à AB (définition 15) ; ensuite, puisque le point B est le centre du cercle CAE, BC est égale à BA ; or les choses égales à une même choses sont aussi égales entre elles (notion commune 1) ; et donc CA est égale à CB ; donc les trois droites CA, AB, BC sont égales entre elles.

Donc le triangle ABC est équilatéral (définition 20) et il est construit sur la droite limitée donnée AB.

Ce qu'il fallait faire.

Ici aussi, on appréciera le soin apporté à la rédaction de cette démonstration, en particulier pour démontrer l'égalité des longueurs CA et CB. Mais l'étrange façon qu'a Euclide de nommer les deux cercles construits sur la figure (le cercle BCD et le cercle ACE) présuppose que ces deux cercles se coupent. Rien, dans les énoncés liminaires du livre 1 (définitions, notions communes, demandes) ne permet dire que ces cercles se coupent. On fait donc appel ici à l'évidence.

Il semble bien qu'on ait affaire à une de ces hypothèses qui ne sont pas des axiomes, compte tenu de leur évidence, dont Aristote mentionne l'existence dans les *Seconds analytiques*[29]. De fait, aucun des nombreux reproches adressés dés l'Antiquité à Euclide à propos des *Éléments*, aucun ne porte sur cette démonstration. On remarquera simplement que, dans son *Introduction à la géométrie*, Blaise Pascal énonce dix *principes* et 12 *théorèmes connus naturellement*, le dixième de ces théorèmes étant le suivant : *La circonférence qui passe par deux points, l'un au dedans d'un autre cercle, et l'autre au dehors, le coupe en deux points, et en deux seulement*[30]. Ce « théorème connu naturellement » permet alors de démontrer l'existence du point C et donc du triangle ABC, qui est justement celui dont on cherchait une construction.

2.4.3 Superposition de figures

Dans la démonstration du théorème 4, Euclide utilise un autre type de raisonnement. Il s'agit d'un des cas d'égalité de triangle (comme on le disait encore dans les cours de mathématiques des années soixante). Le raisonnement d'Euclide consiste à « appliquer » un triangle sur l'autre.

Proposition 4

Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont un angle égal à un angle, celui contenu par les droites égales, ils auront aussi la base égale à la base, les triangles seront égaux et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent.

Soient deux triangles ABC, DEF ayant les deux côtés AB, AC égaux aux deux côtés DE, DF, chacun à chacun d'une part AB à DE, d'autre part AC à DF, ainsi que l'angle sous BAC égal à l'angle sous DEF (voir la figure 2.9).

Je dis que la base BC aussi est égale à la base EF, et le triangle ABC sera égal au triangle DEF et les angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent, d'une part celui sous ABC à celui sous DEF, d'autre part celui sous ACB à celui sous DFE.

29. Voir le paragraphe 2.5.

30. *L'introduction à la géométrie* nous est connue seulement par la copie d'un fragment ; elle est probablement due à Leibniz et est conservée à la bibliothèque de Hanovre. La copie de Leibniz est reproduite dans un article de Jean Itard : *L'introduction à la géométrie de Pascal* publié dans la *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, année 1962, volume 15, numéros 3-4, pp 269-286. Cet article est également accessible en ligne via le site Persée.

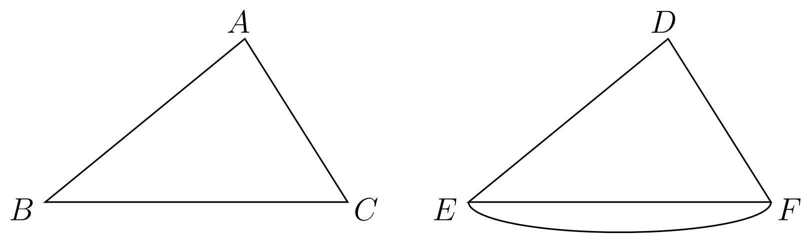


FIGURE 2.9 – La proposition 4 : cas d'égalité des triangles.

En effet, le triangle ABC étant appliqué sur le triangle DEF, d'une part le point A étant posé sur le point D, d'autre part la droite AB sur DE, le point B aussi s'ajustera sur le point E parce que AB est égale à DE. Alors, AB étant ajustée sur DE, la droite AC s'ajustera aussi sur DF parce que l'angle sous BAC est égal à celui sous EDF. De sorte que le point C aussi s'ajustera sur le point F parce que, de plus, AC est égale à DF. Mais B a aussi été ajusté sur E. De sorte que la base BC s'ajustera sur la base EF. {En effet, si, d'une part B s'ajustant sur E, d'autre part C sur F, la base BC ne s'ajustait pas sur EF, deux droites contiendrait une aire, ce qui est impossible (notion commune 9). Donc la droite BC s'ajustera sur EF}[31] *et lui sera égale (notion commune 7). De sorte que tout le triangle ABC s'ajustera aussi sur tout le triangle DEF et lui sera égal (notion commune 7), et les angles restants s'ajusteront sur les angles restants et leur seront égaux (notion commune 7), d'une part celui sous ABC à celui sous DEF, d'autre part celui sous ACB à celui sous DFE.*

On remarquera dans cette démonstration le peu de références sur lesquelles elle s'appuie : il s'agit seulement des notions communes 7 et 9. Il est donc clair que les autres arguments utilisés par Euclide dans cette démonstrations ne font appel à aucun des énoncés liminaires du livre 1.

En suivant Euclide, on *applique* le triangle ABC sur le triangle DEF, A étant *appliqué* sur D, la droite (AB) étant *appliquée* sur la droite (DE) ; il vaut mieux ici entendre la demi-droite $[DE)$. Si on note B' et C' les points sur lesquels sont appliqués B et C, on a $B' = E$, nous dit Euclide, car $DE = AB$. Il faut admettre ici quelque chose qui relève peut-être de l'évidence, à savoir la conservation des distances par *application* et sans doute quelque chose sur

31. Le passage entre accolades est considéré comme une interpolation par Heiberg, l'auteur de l'édition du texte grec à partir de laquelle Bernard Vitrac a effectué sa traduction, celle que nous citons ici. La notion commune 9 fait débat.

l'intersection d'un cercle de centre D et d'une droite passant par D.

Après quoi, Euclide nous dit que la droite (AC) s'ajustera sur la droite (DF), car $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$. Il faut donc admettre que l'*application* d'un triangle sur un autre conserve les angles et supposer en outre que l'angle $\widehat{BAC}$ est « dans le bon sens ». Après quoi, C s'*ajuste* sur F (même argument que celui utilisé pour l'ajustement de B sur E) et $[BC]$ sur $[EF]$ (en admettant qu'un segment s'*applique* sur un segment.

Naturellement, l'usage d'une translation, d'une rotation et éventuellement d'une symétrie axiale orthogonale, permettra au lecteur moderne de définir plus précisément comment s'applique le triangle ABC sur le triangle DEF, mais il est clair que nous sommes maintenant très loin des axiomes, postulats et définitions du livre 1.

Conclusion

L'examen des démonstrations d'Euclide ne doit pas, malgré toutes les critiques qui peuvent être faites, conduire à dénigrer le travail d'Euclide qui, bien au contraire, est prodigieux. Depuis l'Antiquité jusqu'à nos jours, de nombreuses critiques, plus ou moins justifiées, ont été faites au sujet des *Éléments*. Nous ne les examinerons pas ici, nous contentant d'apprécier la distance qui sépare la conception qu'Euclide semble avoir eu des mathématiques, de celle qui prévaut actuellement. Dans les *Éléments*, tout se passe comme si les mathématiques constituaient une science expérimentale, au même titre, par exemple, que la physique ou l'astronomie. L'histoire de la géométrie et de ses fondements nous engage à être plus prudents, sans toutefois tomber dans les excès des programmes en vigueur dans l'enseignement secondaire au cours des années 1970.

Chapitre 3

La théorie des parallèles de Lobatchevski

3.1 Apparition de la géométrie hyperbolique

Après les tentatives infructueuses de démonstrations de l'axiome d'Euclide à partir des autres axiomes des *Éléments*, notamment par Sacchieri et Legendre, plusieurs tentatives eurent lieu pour démontrer l'*incompatibilité* de l'axiome d'Euclide avec les autres axiomes de la géométrie euclidienne.

Ces tentatives sont l'œuvre de trois mathématiciens dont les rôles sont de nature et de portée diverses. Il s'agit de Carl-Friedrich Gauss (1777-1855), de Nicolaï Lobatchevski (1792-1856) et de Janos Bolyai (1802-1860). Le premier a avoir publié un article sur la géométrie non euclidienne est Lobatchevski (en 1829). Bolyai a publié en 1832 un mémoire traduit en Français sous le titre *La science absolue de l'espace, indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'axiome XI d'Euclide, que l'on ne pourra jamais établir a priori*. Quant à Gauss, il n'a rien publié sur le sujet, ses quelques réflexions, pourtant fort explicites, sont restées confinées dans le cadre de sa correspondance privée, en particulier dans des lettres (1824, 1831, 1846).

Dans les géométries non euclidiennes, on suppose que l'axiome d'Euclide est faux, c'est-à-dire que, par un point donné extérieur à une droite donnée, passent plusieurs parallèles à cette droite, ou bien qu'il n'en passe aucune. Aussi bien Bolyai que Lobatchevski se sont attachés à l'unique cas où il passe par un même point plusieurs parallèles à une même droite. Nous nous attarderons ici essentiellement sur le travail de Lobatchevski.

Né en 1792 à Nijni-Novgorod, orphelin de père dès l'âge de sept ans, il réussit, grâce à une bourse d'état, à mener des études universitaires complètes à l'université de Kazan, nouvellement créée. Il donne ses premiers cours dans cette université en 1814, est nommé professeur titulaire en 1822 et exercera les fonctions de recteur de l'université de Kazan pendant 19 ans [1].

La partie la plus célèbre de l'œuvre de Lobatchevski porte sur la géométrie, plus exactement la géométrie qu'on appelle maintenant géométrie *hyperbolique* et que Gauss caractérise ainsi : il s'agit *de la géométrie qui devrait exister, et dont le développement formerait un enchainement rigoureux, si la géométrie euclidienne n'était pas vraie* [2]. Dans ses *Études géométriques sur la théorie des parallèles*, Lobatchevski explique que son *premier essai sur les fondements de la géométrie a paru dans le Courrier de Kazan pour l'année 1829*, puis qu'il a fait paraître au cours des années 1836, 1837, 1839, dans ce même *Courrier de Kazan* les *Nouveaux principes de géométrie, avec une théorie complète des parallèles.* Il publia en 1837, dans le prestigieux *Journal de Crelle*, un traité intitulé *Géométrie imaginaire.* D'autres articles parurent par la suite, écrits en français, en allemand ou en russe.

Il est certain que les conceptions de Lobatchevski sur la géométrie n'ont pas rencontré l'accueil qu'espérait Lobatchevski. Pour que les choses changent, il fallut attendre la mort de Gauss et la publication, au cours des années 1860-1865, de sa correspondance avec Schumacher [3]. La traduction en français des *Études géométriques sur la théorie des parallèles* par Jules Houël [4] est publiée en 1866 (10 ans après la mort de Lobatchevski), accompagnée de quelques lettres extraites de la correspondance entre Gauss et Schumacher. Parmi ces lettres, celle du 28 novembre 1846, adressée par Gauss à Schumacher, est décisive.

Dans cette lettre, Gauss écrit notamment : *j'ai eu dernièrement l'occasion de relire l'opuscule de Lobatchevski, intitulé : Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelenlinien. (...) Vous savez que depuis cinquante-quatre ans (depuis 1792) je partage les mêmes convictions (...) Je n'ai donc trouvé dans l'ouvrage de Lobatchevski aucun fait nouveau pour moi ; mais l'exposition est toute différente de celle que j'avais projetée et l'auteur a traité la*

1. On trouvera plus de détails sur la biographie de Lobatchevski sur le site de l'université de St Andrew (http ://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies /Lobatchevski.html). Il existe également un article de Jean-Luc Chabert, publié et mis en ligne par la revue Repères. On trouve enfin, mais il faut l'acheter d'occasion, une biographie de Lobatchevski publiée par les éditions MIR en 1977, traduction d'un ouvrage écrit en 1943 par Vényamin Kagan.

2. Lettre de Gauss à Schumacher, datée du 28 novembre 1846.

3. Des extraits de cette correspondance sont accessibles en ligne sur Google Book.

4. Jules Houël traduit la version allemande de ce texte, publiée en 1840. Il en existe une version antérieure, en russe.

matière de main de maître et avec le véritable esprit géométrique. Je crois devoir appeler votre attention sur ce livre, dont la lecture ne peut manquer de vous causer le plus vif plaisir. [5]

Il semble que la publication de cette lettre ait motivé un certain nombre de lectures. L'*essai d'interprétation de la géométrie non euclidienne* de Beltrami est publié dès 1868. D'autres auteurs, et non des moindres, interviennent (Klein entre autres).

Étonnant retournement de situation, il s'est trouvé au moins un auteur [6] pour attribuer à Gauss la majorité des idées développées par Lobatchevski et Bolyai sur la géométrie non euclidienne. En ce qui concerne Lobatchevski, on met en avant la présence à Kazan de Bartels comme professeur. Martin Bartels (1769-1833) était un des amis de Gauss, mais aussi, à Kazan, professeur de Lobatchevski dont il appréciait les compétences en mathématiques. Il aurait en quelque sorte servi d'intermédiaire entre Lobatchevski et Gauss. Ceci dit, on n'a trouvé dans les papiers de Gauss que peu de choses concernant la géométrie non euclidienne, si du moins on en croit Jules Houël. Et ce qui est certain, c'est que Gauss n'a rien publié sur le sujet, sans qu'on sache exactement pourquoi. Quoiqu'il en soit, il fallait que les idées exposées dans ce texte soit d'assez haute volée, pour qu'on puisse en créditer Gauss.

3.2 Le traité des parallèles : énoncés liminaires

Dans un court texte d'une page qui sert d'introduction aux *Études géométriques sur la théorie des parallèles*, Lobatchevski estime qu'en dehors des applications de l'analyse à la géométrie, cette dernière n'a guère fait de progrès depuis Euclide. Cela est dû essentiellement à *l'importante lacune que représente la théorie des parallèles. Bien qu'elle ait semblé depuis Legendre* [7] *avoir perdu tout intérêt, je (Lobatchevski) n'en persiste pas moins à croire que la théorie des parallèles conserve toujours ses droits à l'attention des géomètres.* Le traité qui suit est un exposé de quelques dizaines de pages et commence par 15 propositions *dont la connaissance est nécessaire pour ce qui va suivre.* Voici ces propositions.

1 *Une ligne droite se superpose à elle-même dans toutes ses positions. J'entends par-là, que si l'on fait tourner autour de deux points de la ligne*

5. Lobatchevski, *La théorie des parallèles*, traduction de Jules Houël, édition Monom.
6. Morris Kline selon le site de l'université de Saint-Andrew.
7. Lobatchevski fait allusion aux différentes preuves que Legendre pensait avoir données de l'axiome des parallèles.

droite la surface qui la contient, cette ligne droite ne change pas de place.

2 *Deux lignes droites ne peuvent se couper en deux points.*

3 *Une ligne droite, suffisamment prolongée dans les deux sens, pourra dépasser toute limite, et partagera ainsi en deux parties toute portion du plan limitée.*

4 *Deux lignes droites perpendiculaires à une troisième et situées dans un même plan que cette troisième, ne peuvent se couper quelque loin qu'on les prolonge.*

5 *Une ligne droite coupera toujours une autre droite, lorsqu'elle aura des points situés de part et d'autre de celle-ci.*

6 *Deux angles opposés par le sommet et ayant leurs côtés situés sur les prolongement les uns des autres sont égaux. Cette proposition est vraie aussi pour les angles dièdres.*

7 *Deux lignes droites ne peuvent se couper, lorsqu'elles sont coupées par une troisième sous des angles égaux.*

8 *Dans un triangle rectiligne, à des côtés égaux sont opposés des angles égaux et réciproquement.*

9 *Dans un triangle rectiligne, à un plus grand côté est opposé un plus grand angle. Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est plus grande que chacun des côtés de l'angle droit, et les deux angles adjacents à l'hypoténuse sont aigus.*

10 *Deux triangles rectilignes sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal et deux angles égaux, ou deux côtés égaux comprenant un angle égal, ou deux côtés égaux et l'angle opposé au plus grand de ces deux côtés égal, ou enfin les trois côtés égaux.*

11 *Une droite perpendiculaire à deux droites situées dans un plan qui ne la contient pas est perpendiculaire à toute droite menée par son pied dans ce plan.*

12 *L'intersection d'une sphère avec un plan est un cercle.*

13 *Une droite perpendiculaire à l'intersection de deux plans perpendiculaires entre eux, et située dans l'un de ces deux plans, est perpendiculaire à l'autre.*

14 *Dans un triangle sphérique, à des côtés égaux sont opposés des angles égaux et réciproquement.*

15 *Deux triangles sphériques sont égaux lorsqu'ils ont deux côtés égaux comprenant un angle égal, ou bien un côté égal adjacent à deux angles égaux.*

La proposition 3 a un énoncé un peu mystérieux. Lobatchevski y fait référence dans la démonstration de sa proposition 17, sous une forme plus claire : une droite pénétrant à l'intérieur d'un triangle en coupant l'un des côtés de ce triangle, est confondue avec la droite qui porte ce côté ou coupe un des deux autres côtés de ce triangle.

3.3 Le parallélisme selon Lobatchevski

La proposition 16

La proposition 16 introduit le parallélisme en s'appuyant sur la figure 3.1.

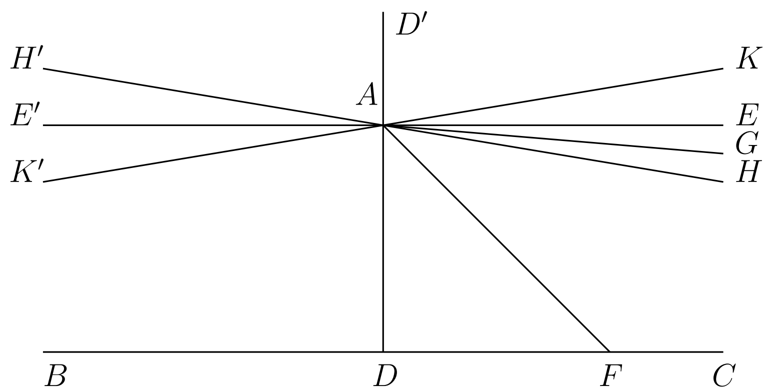


FIGURE 3.1 – La figure de la proposition 16.

On considère un point A, une droite (BC) ne passant pas par A, la perpendiculaire (DD') à (BC) passant par A, D étant l'intersection des droites (AD) et (BC), et enfin la perpendiculaire $(E'E)$ à (DD') passant par A.

Parmi les droites qui passent par A, certaines coupent (BC), comme par exemple la droite (AF), d'autres ne la coupent pas, comme la droite $(E'E)$ (en vertu de la proposition 7).

Puis Lobatchevski écrit ceci :

Dans l'incertitude, si la perpendiculaire (AE) *est la seule droite qui ne rencontre pas* (DC)*, nous admettrons la possibilité qu'il existe encore d'autres droites, telles que* (AG)*, qui ne coupent pas* (DC) *quelque loin qu'on les prolonge.*

En passant des droites (AF)*, qui coupent* (CD)*, aux droites* (AG)*, qui ne coupent pas* (CD)*, on trouvera nécessairement une ligne* (AH)*, parallèle à* (DC)*, c'est-à-dire une droite d'un côté de laquelle les droites* (AG) *ne coupent pas* (CD)*, tandis que de l'autre côté, toutes les droites* (AF) *rencontrent* (CD)*.*

La position de (AH)

C'est l'existence de cette droite (AH), qui marque la frontière entre les droites (il s'agit en fait plutôt de demi-droites) passant par A et qui ne coupent pas (BC) et les (demi-)droites passant par A et qui coupent (BC), qui pose problème.

Considérons la figure 3.2 en reprenant la figure 3.1. On considère un point M de la demi-droite $[AE)$ et un point N de la demi-droite $[DC)$. La droite (AH) coupe (MN) en h.

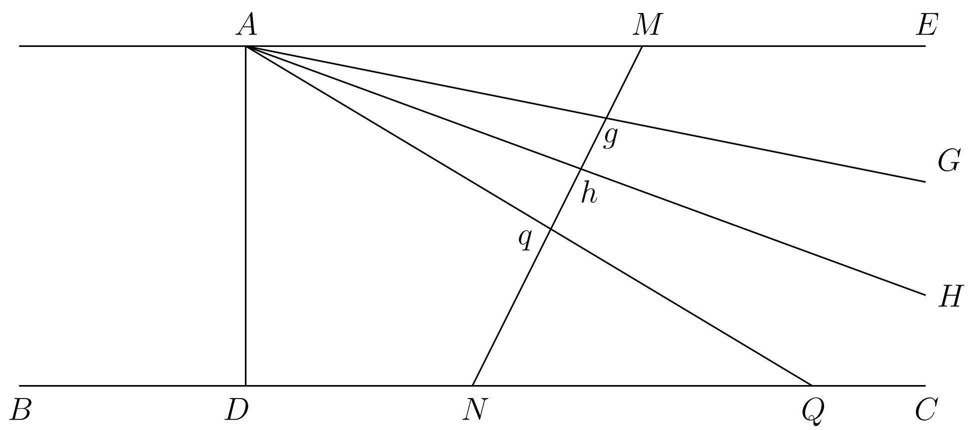


FIGURE 3.2 – Position de la droite limite.

Si Q est un point de la demi-droite $[NC)$, la demi-droite $[AQ)$ coupe le segment $[MN]$ en un point q. Le point q est dans le segment $[Nh[$ ouvert en h. Chaque demi-droite $[AG)$ issue de A située dans le secteur angulaire $\widehat{HAE}$ coupe le segment $[MN]$ en un point g ; le point g est dans le segment $[Mh]$. Le point h est à la frontière de l'ensemble des points g et de l'ensemble des points q. Il appartient au premier de ces ensembles.

L'angle de parallélisme

Dans la figure 3.2, posons $p = AD$ et $\Pi(p) = \widehat{HAD}$. Cet angle est appelé *angle de parallélisme*[8]. Lobatchevski fait remarquer que si $\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$, il y a une autre droite AK, *faisant avec* AD *le même angle* $\widehat{DAK} = \Pi(p)$. On aboutit à la figure 3.3.

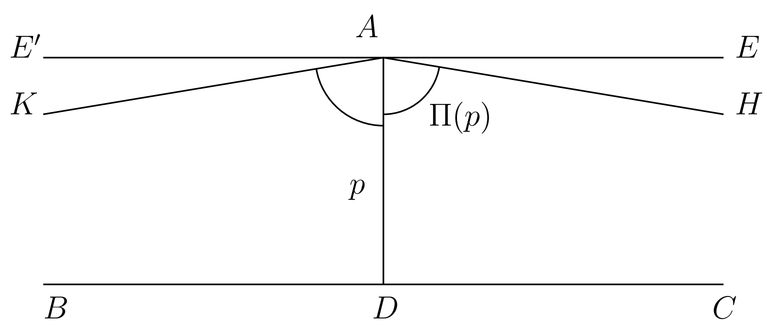


FIGURE 3.3 – L'angle de parallélisme.

La proposition 17 sur le parallélisme

Proposition 17 : *Une ligne droite conserve le parallélisme en tous ses points.*

La proposition 17 a de quoi surprendre.

On constate effectivement que, dans la définition (voir la figure 3.1.) que donne Lobatchevski du parallélisme, le point A, à partir duquel sont menées les parallèles à la droite (BC) joue un rôle important.

Considérons la figure 3.4.

8. La notation utilisée par Lobatchevski semble accréditer l'idée que cet angle ne dépend que de la distance AD de A à la droite (BC), affaire à suivre.

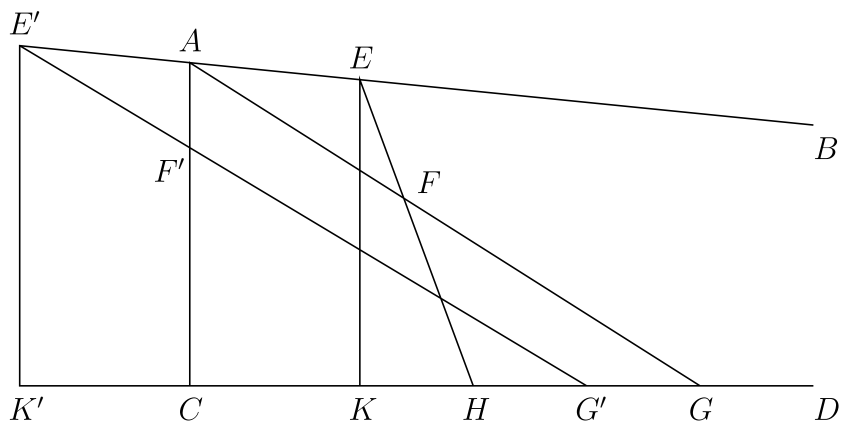


FIGURE 3.4 – Conservation du parallélisme.

La droite (AB) étant une parallèle à (CD) passant par A, il s'agit de montrer que, pour tous points E, E' de cette droite, (AB) est parallèle à (CD) en E et en E'. Comme il a été vu ci-dessus, puisque (EB) et (CD) sont non sécantes, toute demi-droite issue de E située au-dessus de (EB) est non sécante avec (CD). Si l'on considère une demi-droite $[EF)$ située à l'intérieur de l'angle $\widehat{BEK}$ ((EK) étant perpendiculaire à (CD)), compte tenu que (AF) et (CD) sont sécantes (à cause du parallélisme de (AB) à (CD) en A), on obtient un triangle ACG, à l'intérieur duquel (EF) pénètre. Comme (EF) ne coupe pas (AC), ni (AG) une seconde fois (faute de quoi (EF) et (AG) seraient confondues), elle doit donc couper (CD) en un point H. Ainsi, (EB) est la limite entre les non sécantes avec (CD) passant par A et les sécantes avec (CD) passant par A, c'est-à-dire que (AB) est parallèle à (CD) en E. On raisonne de façon analogue en E'.

3.4 Quelques énoncés de la géométrie hyperbolique

Lobatchevski énonce et démontre un certain nombre de propositions. Parmi ces propositions, certaines correspondent aux idées que l'on se fait habituellement du parallélisme, d'autres sont plutôt déroutantes. En voici quelques unes.
Proposition 18

Deux droites sont toujours réciproquement parallèles.

Il faut entendre par là que si d est une droite parallèle à d', alors d' est parallèle à d.
Proposition 19

Dans tout triangle rectiligne, la somme des trois angles ne peut surpasser deux angles droits.

Il s'agit là d'un résultat obtenu par Legendre, indépendamment de l'axiome d'Euclide. On sait par ailleurs que l'axiome d'Euclide est équivalent à la proposition selon laquelle la somme des angles d'un triangle quelconque est égale à deux droits.
Proposition 20

Si dans un triangle rectiligne quelconque, la somme des trois angles est égale à deux angles droits, il en sera de même pour tout autre triangle.
Proposition 21

Par un point donné, on peut toujours mener une ligne droite qui fasse avec une droite donnée un angle aussi petit que l'on voudra.

Proposition 22

Si deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles, la somme des angles d'un triangle rectiligne quelconque sera égale à π.

Proposition 23

Étant donné un angle quelconque α, on peut toujours trouver une distance p telle que $\Pi(p) = \alpha$.

Proposition 24

Si l'on prolonge de plus en plus loin deux droites parallèles dans le sens de leur parallélisme, elle s'approcheront de plus en plus l'une de l'autre.
Proposition 25 : transitivité du parallélisme

Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.

Ce résultat apparaît relativement tard dans le traité de Lobatchevski.
Proposition 29

Dans un triangle rectiligne, les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés ou ne se rencontrent pas, ou se rencontrent toutes en un même point.

Effectivement, la démonstration classique, en géométrie euclidienne, de l'existence d'un point de concours des médiatrices des trois côtés d'un triangle repose sur le fait que deux quelconques de ces médiatrices sont sécantes, mais pour cela, il faut utiliser des propriétés des parallèles et des perpendiculaires qui ne sont pas vraies en géométrie non euclidienne. La proposition 29 est complétée par la proposition suivante.
Proposition30

Les perpendiculaires élevées aux milieux des côtés d'un triangle rectiligne seront toutes les trois parallèles entre elles, toutes les fois que l'on en suppo-

sera deux parallèles.

3.5 Horicycle et horisphère

Dans la proposition 31, Lobatchevski définit ce qu'il appelle l'*horicycle*, ou *courbe-limite*[9].

Lobatchevski écrit : *Nous appellerons courbe limite (horicycle) la ligne courbe, située dans un plan, et telle que toutes les perpendiculaires élevées sur les milieux de ses cordes soient parallèles entre elles.*

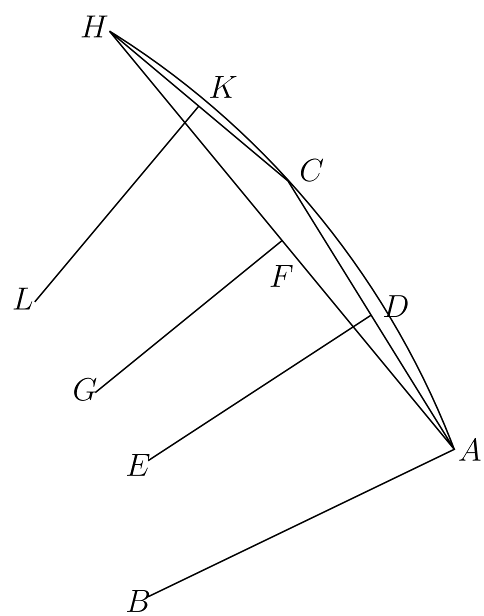


FIGURE 3.5 – Construction de la courbe-limite (horocycle).

Lobatchevski émet le commentaire suivant (voir la figure 3.5) : *Conformément à cette définition, on peut concevoir que la courbe-limite soit engendrée comme il suit : étant donnée une droite* (AB)*, par un point* A *pris par cette droite, on mène sous divers angles* $\widehat{CAB} = \Pi(a)$[10]*, des cordes* $AC = 2a$*. L'extrémité* C *de chacune de ces cordes sera située sur la courbe limite, dont*

9. Pascal Quinton n'a pas eu le temps de développer ses idées sur cette dernière partie, la plus difficile du texte de Lobatchevski.

10. Il est fait référence implicite à la proposition 23

on pourra déterminer successivement tous les points. L'existence de courbes horocycles est ainsi assurée.

Enfin, les perpendiculaires aux cordes de l'horicycle passant par le milieu de cette corde sont appelées *axes* de l'horicycle considérée. Tous ces axes sont parallèles (voir la figure 3.6).

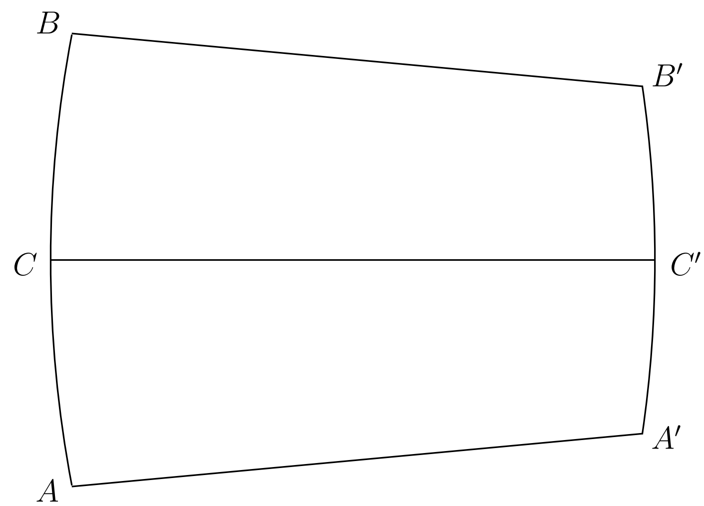


FIGURE 3.6 – Axes de l'horicycle.

La proposition 32 énonce que tout cercle dont le rayon va croissant se change en une courbe-limite (ou horocycle). Dans la proposition 33, on considère deux droites (AA') et (BB'), parallèles entre elles du côté de A vers A', on suppose $AA' = BB' = x$ et on suppose que les parallèles à ces droites qui servent d'axes aux deux arcs de courbe-limites $AB = s$ et $A'B' = s'$. *On aura* $s' = se^{-x}$*, e étant indépendant des arcs* s *et* s'*, et de la droite* x *distances des arcs* s *et* s'. Lobatchevski fait remarquer que *le nombre* e *étant un nombre inconnu soumis à la seule condition* $e > 1$*, et d'un autre côté, l'unité qui mesure la ligne* x *pouvant être prise arbitrairement*, on pourra, pour simplifier le calcul choisir cette unité de telle sorte que e devienne égal à la base des logarithmes népériens. La relation $s' = se^{-x}$ indique également que les droites (AA') et (BB') *présentent le caractère des asymptotes.*

Dans la proposition 34, Lobatchevski définit ce qu'il appelle la *surface-limite*, ou *horisphère* comme la surface engendrée par la révolution d'une courbe-limite autour d'un de ses axes, lequel sera, comme tous les autres axes de la courbe-limite, un axe de la surface-limite. Puis Lobatchevski démontre que tous les axes de la surface-limite sont des axes de révolution de la surface-limite.

La proposition 35 s'appuie sur la proposition 25, qui est une proposition de géométrie dans l'espace (hyperbolique). Elle s'énonce ainsi : *Lorsque trois plans se coupent deux à deux suivant des droites parallèles, la somme des trois angles dièdres est égale à deux angles droits.*

Les trois dernières propositions s'appuient sur de redoutables calculs. À partir de figures soigneusement construites et dont la construction est méticuleusement décrite, Lobatchevski mène toute une série de calculs qu'il ne détaille pas et qui aboutissent à différentes relations. La proposition 35 aboutit aux relations suivantes, qui concernent un triangle sphérique rectangle dont les côtés ont pour longueurs respectives a, b, c, et dont les angles respectivement opposés à ces côtés sont de mesures respectives $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}
\sin a &= \sin c \sin \widehat{A} \\
\sin b &= \sin c \sin \widehat{B} \\
\cos \widehat{A} &= \cos a \sin \widehat{B} \\
\cos \widehat{B} &= \cos b \sin \widehat{A} \\
\cos c &= \cos a \cos b
\end{aligned}$$

Ces formules de résolution de triangles sphériques rectangles sont les mêmes en géométrie hyperbolique qu'en géométrie euclidienne. Ce qui permet à Lobatchevski d'écrire : *la trigonométrie sphérique est indépendante de ce que, dans un triangle rectiligne la somme des trois angles est ou n'est pas égale à deux angles droits.*

La proposition 36 donne des précisions sur la fameuse fonction Π (l'angle de parallélisme).

Troisième partie

Mesure de la Terre

Chapitre 4

Activités mathématiques à propos de la mesure de la Terre

Résumé *Le thème de la mesure de la Terre peut donner lieu à diverses activités mathématiques dans les classes de lycée. Elles permettent d'illustrer diverses notions figurant au programme de ces classes, mais elles sont aussi l'occasion d'une réflexion scientifique approfondie. Même les questions les plus simples (par exemple : quelle est la forme de la Terre ?) peuvent donner lieu à un débat scientifique, à partir du moment où l'on refuse toute forme d'argument d'autorité. La lecture de textes anciens est particulièrement adaptée à ce type de débat.* [1]

4.1 Introduction

Le travail présenté ici est constitué d'un ensemble d'activités utilisables en classe de 1ère S. Le thème de la mesure de la Terre permet en effet d'illustrer les notions de trigonométrie qui sont au programme de cette classe. Ces activités peuvent, bien entendu, être utilisées partiellement, mais il m'est apparu que l'examen par les élèves de l'ensemble de ces activités permet une démarche scientifique plus riche, dans la mesure où les questions posées apparaissent naturellement.

1. Article paru dans *Repères-IREM* n° 40, octobre 2002 et dans les Actes du treizième colloque Inter-IREM d'Histoire et d'Épistémologie des mathématiques (6-8 mai 2000, IREM de Rennes, octobre 2002) ; quand les deux versions présentent des différences, j'ai adapté les textes (note de jpE).

La première activité est basée sur un texte de Ptolémée, extrait de L'Almageste, dans lequel est expliqué pourquoi on peut considérer « à bon droit » que la Terre est « sensiblement en forme de sphère ».

Dans une deuxième activité, on examine avec les élèves la mesure du méridien terrestre par Ératosthène. Le texte utilisé est extrait de l'*Histoire des mathématiques* par Montucla. Outre son caractère pittoresque, ce texte a le mérite de mettre en évidence l'irritant problème des unités de mesure utilisées dans l'Antiquité.

La troisième activité concerne la mesure du degré de méridien effectuée par Jean Picard en 1669-1670. La méthode utilisée pour cette mesure est plus aisément comprise par les élèves du fait qu'ils ont pu auparavant comprendre le caractère en quelque sorte théorique de la mesure d'Ératosthène, du moins telle qu'elle nous apparaît à travers les récits qui nous en sont parvenus.

4.2 La forme de la Terre

4.2.1 Texte de l'activité (document destiné aux élèves)

Preuve que la Terre est sphérique selon Ptolémée

On ne sait pas grand chose de la vie de Ptolémée. Il vivait à Alexandrie. On ne connaît ni la date de sa naissance ni celle de sa mort. Cependant les résultats des observations astronomiques qu'il a effectuées permettent aux astronomes modernes de situer dans le temps ces observations : elles ont eu lieu entre 127 et 150 après J.C.

Le texte qui suit est extrait de l'ouvrage le plus fameux de Ptolémée : *l'Almageste.*

Que la Terre aussi, quand elle considérée dans son ensemble, soit sensiblement en forme de sphère, voici comment on pourrait le concevoir : le soleil, la lune et les autres astres, on peut le constater, ne se lèvent pas (ou ne se couchent pas) au même instant pour tous les hommes sur terre, mais ils le font toujours plus tôt pour ceux qui habitent vers l'orient, toujours plus tard pour ceux qui habitent à l'occident. En effet, nous découvrons que les observations d'éclipses, et tout particulièrement celles de la lune, qui sont pourtant faites au même instant, ne sont pas rapportées partout à la même heure (c'est-à-dire à égale distance par rapport au midi), mais que les heures *notées par les plus à l'est des observateurs sont toujours plus tardives que celles notées par les plus à l'ouest. Et puisque la différence des heures est trouvée proportionnelle à la distance entre les lieux, c'est à bon droit que l'on peut assumer que la surface de la Terre est sphérique, parce que sa surface arrondie d'une manière homogène (lorsqu'elle est prise comme un tout) masque [des parties du ciel] pour [les observateurs] successifs d'une manière proportionnelle. Or, si la Terre présentait quelque autre forme, cela n'arriverait pas, comme le montrent les considérations suivantes.*

Si la Terre était concave, les astres en se levant apparaîtraient d'abord aux habitants les plus proches de la région du couchant ; si elle était plate, [les astres] se lèveraient et se coucheraient en même temps pour tous les habitants de la Terre ; si elle avait la forme d'un triangle ou d'un quadrilatère ou de quelque autre parmi les polygones, de nouveau [les astres se lèveraient et se coucheraient] de la même façon et au même instant pour ceux qui habitent sur la même surface plane : or on voit bien que cela ne se produit en aucune façon.

Que la Terre ne peut pas non plus être en forme de cylindre, de telle sorte que la surface incurvée soit tournée vers le levant et le couchant, tandis que les côtés plats qui forment les bases seraient dirigés vers les pôles de l'univers, comme certains pourraient l'accepter comme étant tout à fait plausible, voici qui le montre. Pour aucun des habitants de la surface incurvée, aucun des astres ne serait toujours visible, mais ou bien tous et se lèveraient et se coucheraient pour tous les hommes, ou bien les mêmes astres, distant d'une distance déterminée de chacun des deux pôles, seraient toujours invisibles pour tous les hommes. Or dans la réalité, plus nous nous avançons vers le nord, plus nombreuses parmi les étoiles du sud sont celles qui deviennent cachées, plus nombreuses au contraire parmi les étoiles du nord celles qui apparaissent ; cela montre donc clairement que la courbure de la Terre, cachant régulièrement les astres dans la direction nord-sud dans tous les cas, établit que la forme [de la Terre] est de type sphérique.

À cela s'ajoute encore le fait suivant : si nous faisons voile vers des montagnes ou quelque endroit élevé, depuis quelque direction que ce soit, nous voyons leur grandeur s'accroître petit à petit, comme s'ils surgissaient de la mer elle-même, alors qu'auparavant ils y étaient plongés comme à cause de la courbure de la surface de l'eau.

Questions

Expliquer, à l'aide de schémas, et en suivant le texte de Ptolémée, les affirmations suivantes :

1. La Terre n'est pas plate.
2. La Terre n'est pas concave.
3. La Terre n'est pas un polyèdre.
4. La Terre n'est pas un cylindre dont l'axe est orienté du nord au sud.

4.2.2 Déroulement de l'activité. Réaction des élèves

La durée prévue pour cette activité est de l'ordre d'une heure. Après lecture par les élèves du texte de Ptolémée, la discussion se mène en classe entière.

Le premier travail du professeur est de justifier la légitimité de la question posée : quelle est la forme de la Terre ? Parmi les arguments invoqués par les élèves quand on leur demande de prouver que la Terre est « sensiblement sphérique », figurent ceux-ci.

- Magellan en a fait le tour (et si la Terre était cylindrique ? ou conique ?).
- L'ombre de la Terre sur la Lune est « ronde »(et si c'était un disque ?).
- Les photographies prises de l'espace prouvent que la Terre est sphérique (n'auriez-vous pas un moyen plus économique de prouver cela ?).

C'est avec surprise que les élèves apprennent que les astronomes de l'Antiquité savaient déjà que la Terre est sphérique. Pour la plupart d'entre eux, ils pensaient en effet que la preuve de la sphéricité de la Terre avait été donnée, au péril de sa vie, par Galilée.

Une fois rétablie la vérité, il reste à comprendre comment les astronomes grecs ont pu se rendre compte que la Terre n'est pas plate, alors que toute notre perception sensible du monde qui nous entoure nous conduit à penser le contraire. Lorsqu'on demande aux élèves de prouver que la Terre n'est pas plate, une fois écartées les photographies de la Terre prise de l'espace, les choses deviennent encore plus mystérieuses. L'examen du texte de Ptolémée peut commencer.

1. La première question demande d'illustrer par un schéma et en suivant le texte de Ptolémée, l'affirmation selon laquelle la Terre n'est pas plate. Elle mérite une discussion approfondie (pas loin d'un quart d'heure). Je propose aux élèves de représenter une coupe de la Terre, en l'imaginant plate, et de schématiser les rayons du Soleil ; j'obtiens

la figure 4.1.

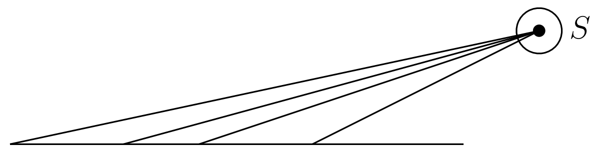


FIGURE 4.1 –

L'affirmation de Ptolémée : *Si elle était plate, [les astres] se lèveraient et se coucheraient en même temps pour tous les habitants de la Terre*) devient compréhensible.
Il faut donc argumenter (c'est le rôle du professeur !) et préciser que la distance de la Terre au Soleil est assez grande pour qu'on puisse considérer que les rayons du Soleil, à un moment donné, peuvent être représentés par des parallèles. Il y a là une difficulté que j'avais déjà remarquée lorsque j'avais abordé la mesure d'Érasthotène dans mes classes. On peut maintenant se mettre d'accord avec les élèves sur le schéma suivant (voir la figure 4.2).

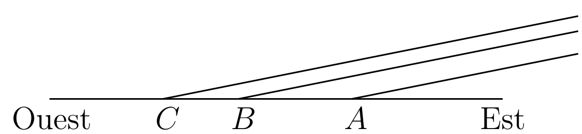


FIGURE 4.2 –

2. Les questions b et c ne posent plus de difficultés.

   Dans la figure 4.3, le soleil se lève en B. Il fait encore nuit en A, alors que A est situé à l'est de B. *Si la Terre était concave, les astres en se levant apparaîtraient d'abord aux habitants les plus proches de la région du couchant.*

3. La figure 4.4 illustre l'affirmation de Ptolémée : *Si [la Terre] avait la forme d'un triangle ou d'un quadrilatère ou de quelque autre parmi les polygones, de nouveau [les astres se lèveraient et se coucheraient]*

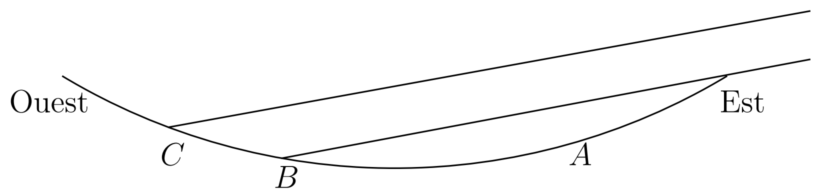


Figure 4.3 –

de la même façon et au même instant pour ceux qui habitent sur la même surface plane : or on voit bien que cela ne se produit en aucune façon.

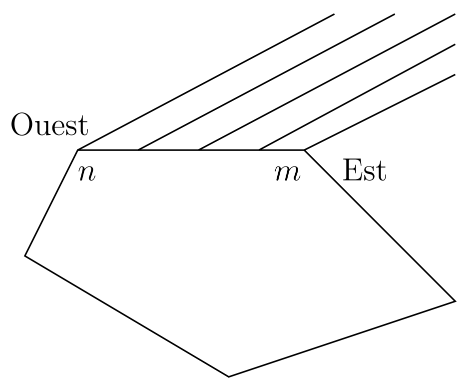


Figure 4.4 –

4. Cette question est plus délicate. Sur la figure 4.5, que je propose aux élèves, on constate que l'astre 2 ne serait visible par aucun habitant de la Terre, puisqu'il serait au-dessus de l'horizon seulement pendant le jour. L'astre 1 se lèverait et se coucherait toutes les nuits pour tous les habitants de la Terre.

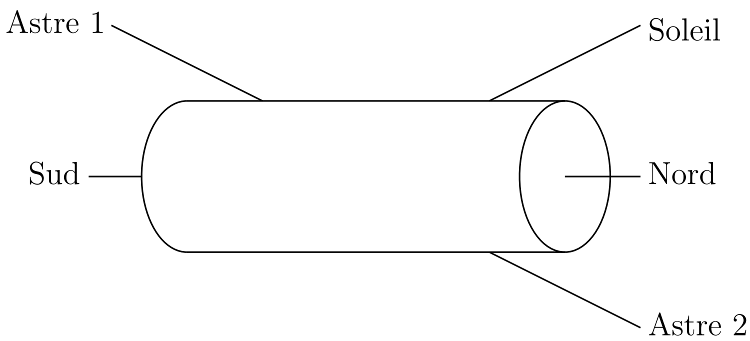


FIGURE 4.5 –

4.3 Mesure de la circonférence terrestre par Ératosthène

4.3.1 Texte de l'activité (document destiné aux élèves)

Ératosthène

C'est aux mathématiciens, astronomes et philosophes grecs que l'on doit l'idée que la Terre est ronde. On leur doit également les premières évaluations de la circonférence de la Terre.

Une des mesures les plus fameuses est due à Ératosthène. Celui-ci a vécu à Alexandrie, en Égypte, de 273 à 192 avant Jésus-Christ. Ératosthène est resté célèbre à plus d'un titre. On lui doit en particulier une méthode permettant de rechercher les nombres premiers (les nombres entiers qui ne sont divisibles que par 1 et par eux-mêmes).

Voici comment Montucla raconte, dans son *Histoire des mathématiques*, publiée en 1758, la vie d'Ératosthène.

Ératosthène fut un de ces hommes rares dont le génie étendu embrasse tous les genres de savoir : orateur, poète, antiquaire, mathématicien et philosophe, il fut nommé par quelques-uns πενταθλος (pentathlos), surnom qu'on donnoit à ceux qui avoient remporté la victoire dans les cinq exercices des jeux olympiques. Ce vaste savoir le fit choisir par le troisième Ptolémée pour son bibliothécaire, emploi qu'il exerça jusqu'à l'âge de quatre vingt ans, où, *las d'une vie infirme et languissante, il la termina en se laissant mourir de faim. Il eût été plus philosophique d'attendre la mort de pied ferme.*

Mesure de la circonférence terrestre

Le même Montucla décrit ainsi la manière dont Ératosthène a effectué sa mesure.

Il y avoit à Syène, un puits profond qui étoit entièrement illuminé à midi, le jour même du solstice d'été. Ératosthène l'avoit remarqué ; et comme à 300 stades à la ronde les hauteurs verticales ne jettoient pas d'ombre à ce moment, il en concluoit que Syène étoit précisément sous le tropique du Cancer. Il supposa ensuite que Syène et Alexandrie étoient l'une et l'autre sous le même méridien, et il estima leur distance de 5000 stades. Il ne s'agissoit plus que de connoître quelle partie du méridien terrestre étoit l'arc compris entre ces deux villes.

Pour y parvenir, il attendit à Alexandrie le midi du jour du solstice, moment où le soleil étoit absolument vertical à Syène ; et (...) il mesura l'arc intercepté entre le soleil alors au zénith de Syène, et le zénith d'Alexandrie. Il le trouva par-là d'une 50eme partie de la circonférence, d'où il conclut que la grandeur du degré terrestre étoit de 250 000 stades.

On peut schématiser ainsi la situation. On a représenté le méridien passant par Alexandrie (point A) et Syène (point S). Ce méridien est un cercle dont le centre O est le centre de la Terre.

Questions

1. Indiquer sur le dessin (voir page suivante) ci-après les directions suivantes :
   a. le zénith de Syène ;
   b. le zénith d' Alexandrie ;
   c. la direction du soleil à Syène le jour du solstice ;
   d. la direction du soleil à Alexandrie le jour du solstice.

2. Marquer sur le dessin l'angle que mesure Ératosthène.

3. Démontrer que cet angle est égal à l'angle $\widehat{AOS}$.

4. Cet angle étant la 50-ème partie de la circonférence terrestre, calculer la longueur en stades de cette circonférence.

5. Calculer en stades le rayon de la Terre.

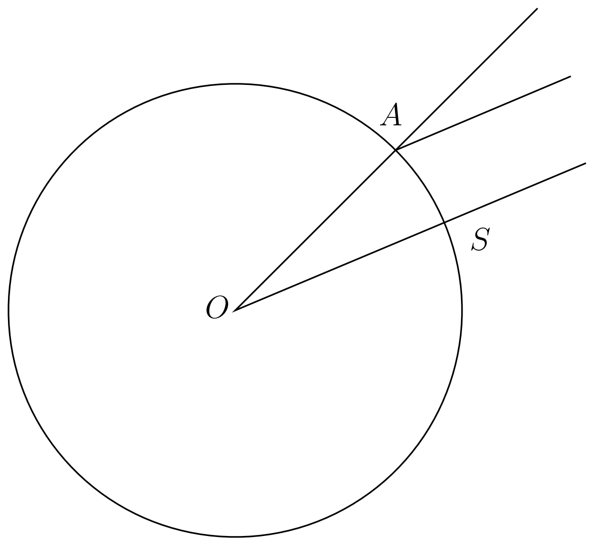


FIGURE 4.6 –

Critique du résultat attribué à Ératosthène

Les unités de longueurs utilisées

Le malheur est que nous ignorons la valeur du stade utilisé par Ératosthène. Voici ce que nous dit Montucla :

Au reste un élément fort important qui nous manque ici, est l'espèce de stade qu'Eratosthène employa. On est d'abord porté à penser que c'est un stade Égyptien dont 60 composoient un schène, qui lui même valoit 4 milles romains ou 3024 toises, dans lequel cas ce stade valoit 50 toises 2 pieds.

Questions

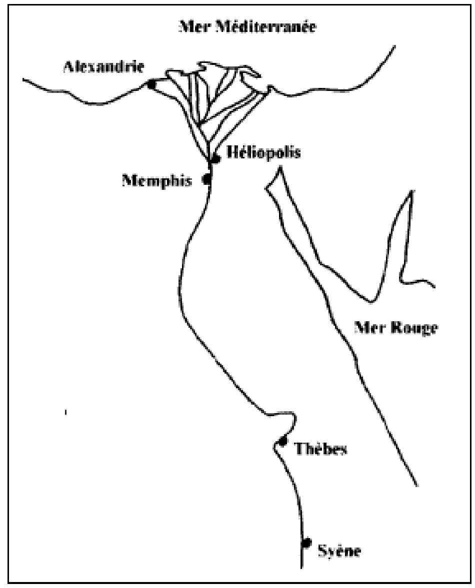
1. Sachant que la toise vaut 6 pieds, quelle est en toises, la mesure de la circonférence terrestre obtenue par Ératosthène, si le stade qu'il emploie est le stade égyptien ?

2. Même question, dans l'hypothèse où le stade employé par Ératosthène serait le stade olympique lequel vaut, selon Montucla, environ 94 toises.

3. La toise utilisée par Montucla vaut approximativement 1,95 m. Exprimer en kilomètres les valeurs obtenues aux questions 1 et 2.

Les situations respectives de Syène et d'Alexandrie

Les villes de Syène (actuellement Assouan) et d'Alexandrie ne sont pas situées sur le même méridien. De plus, la mesure de la distance entre ces deux villes, qu'Ératosthène estime à 5 000 stades, n'est sûrement qu'une évaluation. Pour pouvoir obtenir une mesure précise de la circonférence terrestre par le méthode d'Ératosthène, il nous faudrait disposer de deux points A et B, dont on soit sûr qu'ils sont situés sur un même méridien, assez distants l'un de l'autre, et dont on puisse mesurer la distance avec précision.



4.3.2 Déroulement de l'activité. Réaction des élèves

La durée prévue pour cette activité est de l'ordre d'une demi-heure. Compte tenu de ce qui a été acquis lors de la première activité, le dessin proposé dans l'énoncé pour rendre compte de la mesure d'Ératosthène ne pose pas de problème aux élèves.

Par contre, la discussion sur la validité de cette mesure introduit un certain sentiment de malaise. C'est, à mon sens, une situation tout à fait saine. Le malaise des élèves a plusieurs causes. Tout d'abord, ils n'ont guère l'habitude d'exercer leur esprit critique dans le cadre d'un cours de mathématiques, où l'argument d'autorité (qui a l'avantage de procurer un profond sentiment de sécurité) tient souvent lieu de démonstration.

Ensuite, la discussion sur les unités de mesures, telle que la mène Montucla, pose une vraie question à laquelle aucune réponse n'est apportée dans le cadre de cette activité. Signalons à ce propos que la manipulation de stades, de toises et de leurs conversions en mètres pose quelques problèmes...

J'ai pris le parti délibérément de ne pas trancher quant à la longueur du stade utilisé par Ératosthène, en premier lieu parce que je n'ai pas d'élément assez précis et documenté sur cette question, en second lieu parce que l'intérêt m'en paraît limité pour des élèves de première. Le but n'est pas de discuter de la précision du résultat d'Ératosthène, mais plutôt de se poser quelques questions sur la méthode qu'il a utilisée, ou plutôt sur la méthode que les récits qui nous sont parvenus (Théon de Smyrne, Cléomèdes, Strabon) lui attribuent. Nous ne savons pas non plus comment Ératosthène a mesuré la distance de Syène à Alexandrie (elle est de l'ordre de 850 kilomètres) et il me semble, ici aussi, plus sage de ne pas tenter de reconstitution hasardeuse de l'évaluation qu'a pu faire Ératosthène de cette distance. Il est par contre important de bien souligner la difficulté d'une telle évaluation.

4.4 La mesure de Picard

4.4.1 Texte de l'activité (document destiné aux élèves)

Le texte de Picard

Au cours des années 1669-1670, l'abbé Jean Picard, membre de l'Académie des Sciences, fut chargé par celle-ci de mesurer la longueur du degré du méridien à la latitude de Paris. Diverses mesures avaient déjà été effectuées (Snellius, Riccioli), mais les résultats obtenus divergeaient. Une mesure précise était nécessaire pour permettre l'établissement de cartes détaillées.

Voici comment Picard parle des mesures effectuées antérieurement à la sienne. Elles sont toutes basées sur le même principe.

Ce n'est pas d'aujourd'hui qu'on a tâché de déterminer la grandeur de la Terre. Plusieurs Auteurs anciens se sont signalés par cette recherche ; mais la plus mémorable entreprise qui ait été faite pour ce sujet, est celle des Arabes, qui est rapporté par leur Géographe[2] *en ces termes. « Les grands cercles de la Terre sont divisé en 360 parties, comme ceux que nous imaginons dans le Ciel : Ptolomée Auteur de l'Almageste, & plusieurs autres des anciens, ont observé quel espace contenait sur la Terre l'une de ces 360 parties ou degrés, & ont trouvé qu'elle contenait 66 milles et 2/3. Ceux qui sont venus après eux ont voulu s'en éclaircir par leur propre expérience ; car s'étant assemblés par l'ordre d'Almamon dans les plaines de Sanjar, & ayant pris la hauteur du pôle, ils se séparèrent en deux troupes. Les uns s'avancèrent*

2. Il s'agit, nous dit Picard en note, d'Abulfeda.

vers le Septentrion, & les autres vers le Midi, allant le plus droit qu'il leur fût possible, jusqu'à ce que l'une des troupes eût trouvé le pôle Septentrional plus élevé d'un degré, & que l'autre au contraire l'eût trouvé abaissé d'un degré. Ils se rassemblèrent après à leur première station, pour confronter leurs observations. On trouva que l'une des troupes avait compté dans son chemin 56 milles &2/3, au lieu que l'autre n'avait compté que 56 milles justes ; mais ils demeurèrent d'accord du compte de 56 milles 2/3 pour un degré : si bien qu'entre les observations des anciens , & celle des modernes, il y a une différence de dix milles. »

(...)

Entre les Auteurs modernes, Fernel & Snellius ont été les premiers qui ne se contentant pas d'une tradition incertaine, nous ont voulu laisser leurs observations particulières pour la grandeur du degré.

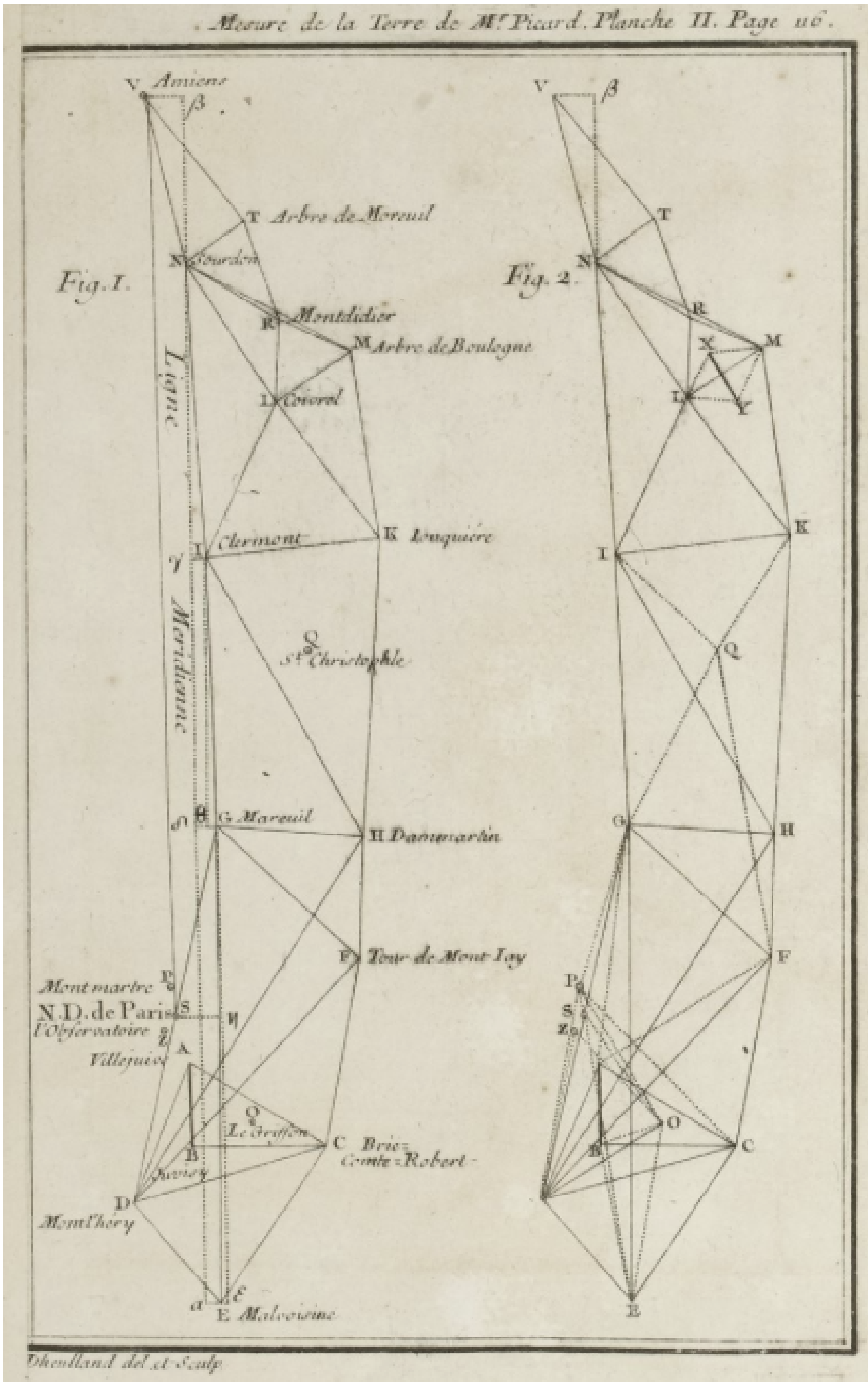
Fernel au commencement de sa Cosmothéorie, dit qu'étant parti de Paris, il marcha directement vers le Nord, jusqu'à ce que par les hauteurs Méridiennes du Soleil, il eût trouvé la hauteur du pôle plus grande qu'à Paris d'un degré entier. Mais soit qu'il ait voulu imiter les Arabes, ou pour quelqu'autre considération, il nous a celé le nom du lieu où il s'était arrêté, disant seulement que c'était à vingt-cinq lieues de Paris, & que pour savoir plus précisément cette distance, il monta dans un Coche, compta tous les tours de roue jusqu'à Paris ; & qu'enfin ayant estimé ce que les inégalités & les détours des chemins avaient pu apporter d'augmentation, il jugea qu'un degré d'un grand cercle de la Terre contenait 68 096 pas Géométriques, qui selon notre façon de mesurer, valent 56 746 toises 4 pieds de Paris.

Le principe d'une telle mesure est simple en théorie. Il suffit de considérer deux lieux A et B, situés sur un même méridien, et dont la différence de latitude soit de 1°. On mesure alors la distance de A à B, qui est la longueur cherchée.

Dans la pratique, c'est compliqué à réaliser, pour plusieurs raisons. Tout d'abord, il est difficile de mesurer avec précision une distance en ligne droite dont l'ordre de grandeur est de 110 kilomètres. Il faudrait pouvoir se déplacer de façon rigoureusement rectiligne sur une telle distance (ce qui n'a rien d'évident) et, de toutes façons, il est fort peu probable qu'on trouve un endroit où un tel déplacement ne rencontre pas d'obstacle (taillis, rivière, etc.). D'autre part, il n'est en rien évident de s'assurer que deux endroits A et B sont sur un même méridien.

Les mesures dont rend compte Picard, celle de Fernel aussi bien que celle des Arabes, ne règlent pas ces problèmes.

A. Principe de la mesure de Picard (voir la figure ci-après)



Les points $A, B, \ldots, Y$ sont des points choisis par Picard de telle façon qu'on puisse mesurer sans difficulté les angles des triangles ABC, ACD, etc. Ces points sont donc visibles de loin, et facilement identifiables.

A. Est le milieu du moulin de Villejuive.
B. Le plus proche coin du pavillon de Juvisy.
C. La pointe du clocher de Brie-Comte-Robert.
D. Le milieu de la tour de Monthléry.
E. Le haut du pavillon de Malvoisine.
F. Une pièce de bois dressée exprès au haut des ruines de la tour de Monjay, & grossie de paille.
G. Le milieu du Tertre de Mareuil, où l'on a été obligé de faire des feux pour le marquer.
H. Le milieu du gros Pavillon en ovale du Château de Dammartin.
I. Le Clocher de Saint Samson de Clermont.
K. Le Moulin de Jonquièeres, proche Compiègne.
L. Le clocher de Coivrel.
M. Un petit arbre sur la Montagne de Boulogne, proche Montdidier.
N. Le Clocher de Sourdon.
O. Un petit arbre fourchu sur la Butte du Griffon, proche Villeneuve Saint Georges.
P. Le clocher de Montmartre.
Q. Le clocher de saint Christophe, proche Senlis.
...
V. Le Clocher de Notre-Dame d'Amiens.

On peut retrouver la localisation de la plupart de ces points sur une carte actuelle.

Cinq points jouent un rôle important : E, G, I, N et V.

Du schéma de Picard, on peut extraire le schéma suivant.

On a figuré le méridien qui passe en N. Les points β, γ, δ et α sont les projetés orthogonaux de V, I, G et E sur ce méridien ; θ et ε sont les projetés orthogonaux de G et E sur les méridiens passant par I et G respectivement.

La méthode utilisée par Picard comporte trois étapes.

a. On mesure les distances VN, NI, IG et GE.

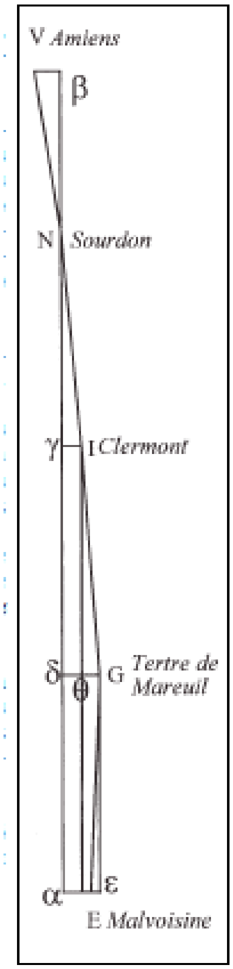
b. On mesure les angles $VN\beta$, γNI, θIG et εGE. On en déduit facilement les distances βN, $N\gamma$, $\gamma\delta$ et $\delta\alpha$ puis la distance $\beta\alpha$.

Cette mesure se fait donc sans qu'il soit nécessaire de situer les points β et α sur le terrain.

c. Il ne reste plus qu'à déterminer les latitudes φ_V et φ_E des points V et E. Ce sont aussi les latitudes des points β et α.

La longueur du degré de méridien est égale à :

$$\frac{\beta\alpha}{\varphi_V - \varphi_E}.$$



B. Mesure des distances EG, GI, IN et NV

On ne s'intéresse ici qu'à la mesure de la distance GE. Les distances GI, IN et NV se calculent de manière analogue. Considérons la figure 4.7.

Le segment AB constitue la base de la mesure de Picard. Sa longueur est mesurée avec précision, ce qui est possible car les points A et B sont reliés par *le grand chemin de Villejuive à Juvisy, lequel chemin étant pavé en droite ligne sans aucune inégalité considérable, & d'une longueur telle qu'on verra ci-après, est propre pour servir de base fondamentale à toute la mesure qu'on avait entreprise.*

Picard évalue cette distance à 5 663 toises. Après quoi, il mesure les angles des triangles ABC, ACD, DEC, DCF, DFG et DEG.

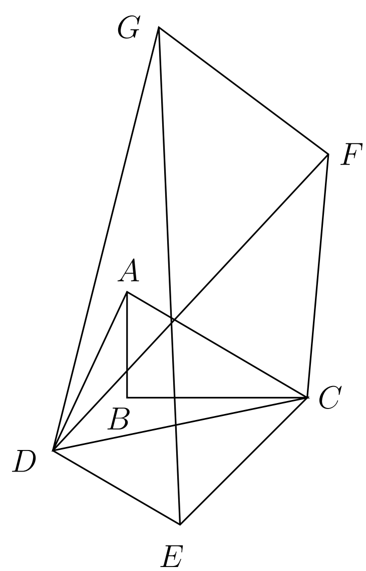


FIGURE 4.7 –

Questions

Les données suivantes sont extraites du texte de Picard. Compléter les blancs.

Indications

On remarquera que, pour les triangles I à V, il faut calculer les longueurs de un ou deux côtés d'un triangle dont on connaît les trois angles et un côté. On utilise donc la relation des sinus. Pour le triangle VI, on cherche la longueur des côtés, connaissant les deux autres côtés et l'angle de ces deux côtés. On utilise donc le théorème d'Al Kashi.

I- TRIANGLE ABC

Pour connaître le côté AC :

CAB	54°4′35”
ABC	95°6′55”
ACB	30°48′30”
AB	5 663 toises

Donc :

AC ………

BC ………

II- TRIANGLE ADC

Pour connaître les côtés DC et AD

DAC	77°25′50”
ADC	55°0′10”
ACD	47°34′0”
AC	………

Donc :

DC ………

AD ………

III- TRIANGLE DEC

Pour connaître les côtés DE et CE

DEC	74°9′30”
DCE	40°34′0”
CDE	65°16′30”
DC	………

Donc :

DE ………

CE ………

IV- TRIANGLE DCF

Pour connaître le côté DF

DCF	113°47′40”
DFC	33°40′0”
FDC	32°32′20”
DC	....

Donc DF ....

V- TRIANGLE DFG

Pour connaître les côtés DG et FG

DFG	92°5′20”
DGF	57°34′0”
GDF	30°20′40”
DF	....

Donc :

DG ....

FG ....

VI- TRIANGLE GDE

Pour connaître le côté GE

GDE	128°9′30”
DG	....
DE	....

Donc :

GE ....

C. Mesure de l'angle entre la droite (GI) et le méridien

Cette mesure se fait à l'aide d'une visée astronomique.

Dans la figure 4.8, G est le tertre de Mareuil. On repère les directions de l'espace à l'aide d'une sphère centrée en G et de rayon R quelconque. Cette sphère coupe le plan horizontal selon un cercle centré en G.

La demi-droite $[GP)$ a la direction du pôle nord céleste.

La demi-droite $[GZ)$ indique la verticale.

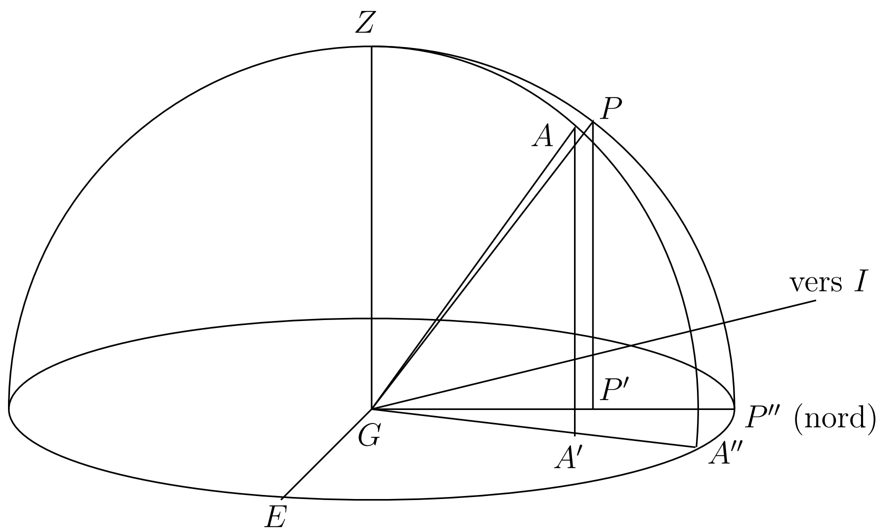


FIGURE 4.8 –

La demi-droite $[GP")$ indique la direction du nord sur l'horizon.

Le point P' est le projeté orthogonal de P sur le plan horizontal.

Les points G, P, Z, P' et $P"$ sont donc coplanaires ; le point P' est sur la demi-droite $[GP")$.

La demi-droite $[GE)$ indique la direction de l'est sur l'horizon (l'angle $EGP"$ est donc droit). La demi-droite $[GI)$ indique la direction de Clermont.

La demi-droite $[GA)$ indique la direction de l'étoile polaire au moment où elle se situe le plus à l'est.

Le point A' est le projeté orthogonal de A sur le plan horizontal.

La demi-droite $[GA')$ coupe le cercle de centre G passant par E et P'' en $A"$.

L'angle PGA est, semble-t-il connu à l'aide de mesures effectuées antérieurement : $PGA = c = 2°28'$.

La mesure de Picard concerne l'angle $A"GI$. L'angle $A"GI$ vaut $4°55'$. L'angle $P''GP$, la hauteur du pôle vaut $a = 49°5'$. La mesure en est faite par Picard par d'autres visées astronomiques que nous n'examinerons pas ici.

On cherche l'angle $A"GP" = b$, qui nous permettra de calculer l'angle $P"GI$.

La demi-droite $[GA)$ donne la direction de la polaire au moment où elle se situe à l'est du pôle. À ce moment là, le pôle et l'étoile polaire ont la même hauteur au dessus de l'horizon, c'est-à-dire que les angles PGP' et AGA'

sont égaux. Il est alors facile de voir que $AA'P'P$ est un rectangle et que, par conséquent, les longueurs AP et $A'P'$ sont égales.

L'instrument qu'utilise Picard permet de matérialiser le plan (ZAG). Ce plan coupe le cercle horizontal en un point A".

Picard laisse en place son instrument toute la nuit et est en mesure, le matin, de repérer sur l'horizon, la direction du point A".

Questions

Expression de $\cos b$ en fonction de a et c

Dans les questions 1 à 4, on n'utilisera pas les valeurs numériques des angles a et c.

1. Exprimer PA'^2 en fonction de R et de l'angle c. (Indication : appliquer le théorème d'Al-Kashi dans le triangle PGA).

2. On rappelle que les angles $A'GA$ et $P'GP$ sont égaux (à a).
En déduire que $GA' = GA\cos a = R\cos a$ et $GP' = GP\cos a = R\cos a$.

3. Exprimer $P'A'^2$ en fonction de R, a et b (utiliser de nouveau le théorème d'Al-Kashi dans le triangle $P'A'G$).

4. Déduire de ce qui précède que :

$$1 - \cos c = (1 - \cos b)\cos^2 a,$$

puis que :

$$\cos b = \frac{\cos c - \sin^2 a}{\cos^2 a}.$$

Calcul de l'angle b et de l'angle $GI\theta$

On rappelle que $a = 49°5'$, $c = 2°28'$ et $A"GI = 4°55'$.

5. Calculer l'angle b.

6. Calculer enfin l'angle entre le méridien et la droite reliant le tertre de Mareuil à Clermont. Cet angle est encore égal à l'angle $GI\theta$.

D. Où l'on finit les calculs

Picard donne les valeurs suivantes :

$NV = 11\ 161$ toises 4 pieds (n.b.Ê : chaque toise vaut 6 pieds) ;
$NI = 18\ 907$ toises ;
$IG = 17\ 564$ toises ;
$GE = 31\ 895$ toises.

Il donne également les angles suivants :

$VN\beta = 18°55'$;
$IN\gamma = 2°9'10"$;
$GI\theta = 1°9'$;
$EG\varepsilon = 0°26'$.

1. Calculer la longueur $\beta\alpha$.

2. Picard effectue diverses corrections et retient la valeur de mesure 78 850 toises pour la longueur $\beta\alpha$. Il évalue enfin la différence des latitudes de Malvoisine et d'Amiens à $1°22'55"$.

a. Calculer la longueur d'un degré de méridien entre Paris et Amiens.

b. La toise utilisée par Picard est la *toise du grand Châtelet*. On peut l'évaluer à 1,949 m. Quelle est la mesure en km du degré du méridien selon Picard ?

c. En admettant que la Terre soit sphérique, quelle valeur peut-on en déduire de la circonférence terrestre ?

Déroulement de l'activité. Réactions des élèves. Première séance (1 heure)

Dans cette première séance, le professeur présente aux élèves la Partie A (principe de la méthode utilisée par Picard), puis la partie B (calcul de la distance GE).

Mise en place de l'activité (20 à 25 minutes)

Cette mise en place est essentielle. Elle se fait avant toute distribution de document aux élèves. Elle est destinée à faire comprendre les difficultés de l'entreprise de Picard et d'expliquer en quoi la méthode utilisée permet de lever ces difficultés. Elle peut s'appuyer sur le récit fait par Picard de certaines mesures antérieures à la sienne. On commence par confronter les trois dessins suivants (voir figure 4.9).

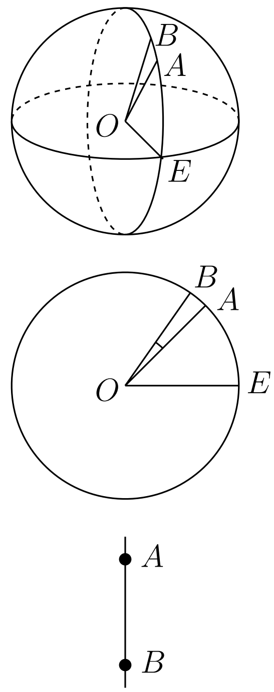


FIGURE 4.9 –

Le deuxième dessin est une vue en coupe du premier. Le troisième dessin s'apparente à une carte. Pour mesurer la circonférence terrestre, il suffit de mesurer la longueur d'un arc AB d'un méridien et d'évaluer l'angle AOB, O étant le centre de la Terre. Cet angle s'obtient en calculant la différence des latitudes des points A et B.

Il faut s'assurer, indépendamment de toute carte (pour disposer d'une telle carte, il faut, au préalable, connaître les dimensions de la Terre), du fait que les points A et B qu'on aura choisis sont effectivement sur le même méridien.

Deuxième type de problème : pour obtenir une mesure fiable de la circonférence terrestre, il est nécessaire que l'angle $\widehat{AOB}$ ne soit pas trop petit. Dans ces conditions, la distance AB à mesurer sera importante (de l'ordre de 110 km, si $\widehat{AOB}$ est de l'ordre de 1°). Même en admettant qu'il n'y ait aucun obstacle naturel entre A et B, il n'est pas certain qu'on puisse être sûr de mesurer la distance AB en ligne rigoureusement droite.

Ces problèmes sont au centre des préoccupations de Jean Picard qui effectue une mesure du méridien terrestre (plus exactement du degré de méridien terrestre) en 1669-1670.

Maintenant, il est temps de distribuer aux élèves la partie A du document. Une lecture commentée par le professeur du texte de Picard sur les mesures antérieures à la sienne permet d'insister sur leur caractère imprécis.

On peut ensuite expliquer la mesure de Picard, en insistant sur les points cruciaux suivants.

Les points situés sur le même méridien et dont on mesure les latitudes le sont par définition. Ils n'ont pas à être situés sur le terrain. Les autres mesures sont des mesures d'angles, lesquelles peuvent se faire avec précision grâce à des instruments appropriés. La seule mesure de distance sur le terrain se fait sur une distance modeste (la base AB, qui mesure 5 663 toises, soit environ 10 km) et dans un endroit qui se prête à cette mesure (les points A et B sont reliés par un chemin en ligne droite et sans inégalité considérable).

On lit avec les élèves la liste des points décrits par Picard et on leur fait repérer ces points sur le schéma de Picard.

On leur fait ensuite tracer sur le dessin les segments VN, NI, IG et GE, ainsi que les méridiens qui passent par V, N, I, G. De cette façon, on fait apparaître le schéma qui figure à la fin de la partie A destinée aux élèves.

On détaille ensuite les trois étapes de la mesure de Picard (calcul des distances VN, NI, IG, GE, mesure des angles $VN\beta$, γNI, θIG et εGE, mesure des latitudes de V et de E). On fait remarquer aux élèves que les points α et β sont, par définition, sur un même méridien et qu'on obtient la longueur $\alpha\beta$ et l'angle $\alpha O\beta$ (O étant le centre de la Terre), sans avoir à situer les points α et β sur le terrain et sans avoir à mesurer en ligne droite la distance qui les sépare.

Partie B de l'activité

Les calculs demandés dans la partie B peuvent être effectués de façon autonome par les élèves. Les principales difficultés rencontrées concernent les mesures d'angles en degrés, minutes et secondes. La masse des calculs à faire nécessite de la part des élèves une organisation rigoureuse des calculs. Certains élèves ont tenté de dessiner à l'échelle les triangles de Picard. On obtient les résultats numériques suivants.

Triangle ABC	$AC = 11\ 012{,}89$ toises	$BC = 8\ 953{,}90$ toises
Triangle ADC	$DC = 13\ 121{,}59$ toises	$AD = 9922{,}37$ toises
Triangle DEC	$DE = 8\ 870{,}29$ toises	$CE = 12\ 389{,}22$ toises
Triangle DCF	$DF = 21\ 657{,}83$ toises	
Triangle DFG	$DG = 25\ 643{,}40$ toises	$FG = 12\ 963{,}59$ toises
Triangle GDE	$GE = 31\ 895{,}73$ toises	

Les élèves ont pour consigne de finir chez eux le calcul pour la séance suivante.

Déroulement de l'activité. Réactions des élèves. Deuxième séance (1 heure)

Cette seconde séance présente le calcul de l'angle entre la direction de Clermont au Tertre de Mareuil et le méridien (partie C de l'activité).

La partie C a été élaborée à partir du texte suivant (que je n'ai pas distribué aux élèves, la lecture m'en paraissant un peu trop difficile).

Le texte de Picard

Après avoir mesuré les distances particulières entre Malvoisine, Mareuil & Sourdon, & même y avoir ajouté celle d'Amiens, il fallait examiner la position de chacune de ces lignes à l'égard de la Méridienne.

Pour cet effet, au mois de Septembre de l'année 1669, nous allâmes sur le Tertre de Mareuil, à l'endroit marqué G, d'où l'on voyait Malvoisine d'un côté, & Clermont de l'autre, & nous mîmes le quart de cercle garni de ses deux Lunettes à plomb sur son pied, en sorte que la lunette EF demeurait toujours dans le niveau, pendant que le plan de l'Instrument était tourné verticalement, & que la lunette de l'Alilade GH étit pointée vers l'Étoile Polaire. On suivit ainsi cette Étoile jusques à la plus grande digression, où elle demeurait une espace de temps assez sensible sans sortir du filet vertical de la Lunette avec laquelle on l'observait, & alors, on laissa l'Instrument fixe dans sa position le reste de la nuit, jusqu'à ce que le jour étant venu on pût découvrir l'endroit du bord de l'horizon, auquel la lunette EF se trouvait pointée, & déterminer par ce moyen le vertical de la plus grande digression de l'Étoile Polaire : car on savoit par expérience, que quand le quart de Cercle était dressé à plomb, les deux Lunettes demeuraient toujours pointées dans un même vertical. Par cette Observation que l'on réitéra plusieurs fois, on s'assura d'un point éloigné qui marquait le vertical de la plus grande digression orientale de l'Étoile Polaire, lequel vertical faisait avec la ligne GI un angle *de* 4°55′ *vers l'Orient : or le complément de la déclinaison de l'Étoile Polaire était alors de* 2°28′*, & la hauteur du pôle au Tertre de Mareuil, ainsi qu'elle fut ensuite trouvée, est de* 49°5′*, & par conséquent la digression de l'Etoile Polaire était de* 3°46′*. Il restait donc encore un degré neuf minutes dont la ligne GI décline du Nord vers l'Occident. Et parce que d'ailleurs les lignes GI, GE font un angle de* 178°25′ *vers l'Occident, lequel angle augmenté de la déclinaison de la ligne GI ne fait que* 179°34′*, il s'ensuit que GE décline de 26' du Midi vers le Couchant.*

Mise en place de la figure

Cette mise en place se fait avant d'avoir communiqué aux élèves le moindre document.

Le problème posé est le suivant : on est en G (le Tertre de Mareuil). On voit le point I (le clocher de St Samson à Clermont). On veut évaluer l'angle entre la direction de Clermont et celle du nord.

1. Le problème qu'on peut poser aux élèves est le suivant : vous êtes perdu la nuit et vous devez marcher vers le nord. La nuit est claire et vous voyez les étoiles.
   En pratique, il y a toujours quelqu'un pour parler de l'étoile polaire.
   Le dessin qu'on peut mettre en place est le suivant (voir figure 4.10) :

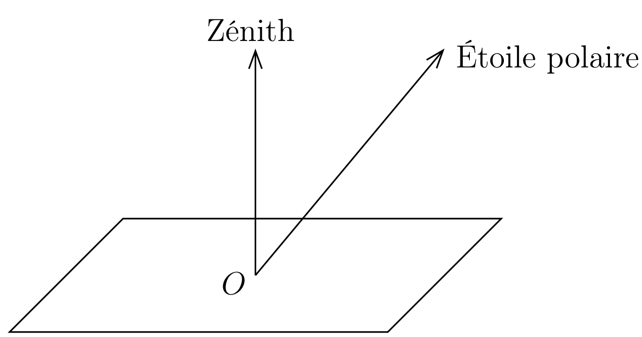


FIGURE 4.10 –

   On se situe en G. On a figuré le plan horizontal. La verticale en G définit ce qu'on appelle le zénith.
2. Bien entendu, on doit marcher vers le nord dans le plan horizontal. La direction du nord s'obtient donc de la façon suivante. Le demi-

plan défini par les deux demi-droites $[GZ)$ et $[GP)$ coupe le plan horizontal selon une demi-droite qui indique la direction du nord (voir figure 4.11).

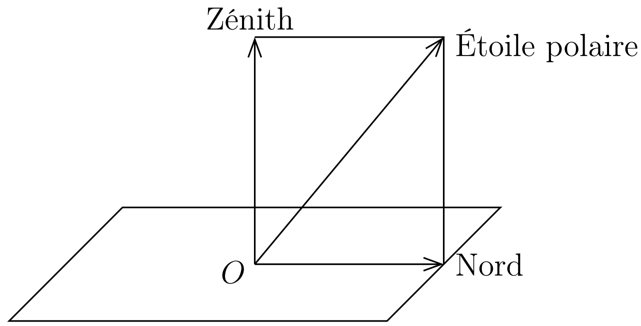


FIGURE 4.11 –

3. La question suivante à poser aux élèves pourrait être celle-ci : pourquoi l'étoile polaire indique-t-elle le nord ?
   À partir de cette question, on peut faire prendre conscience aux élèves du mouvement apparent des étoiles. La polaire, au contraire des autres étoiles, est fixe, ou du moins presque fixe.
   On peut alors définir le pôle nord céleste et rectifier le dessin de façon à obtenir la figure 4.12.

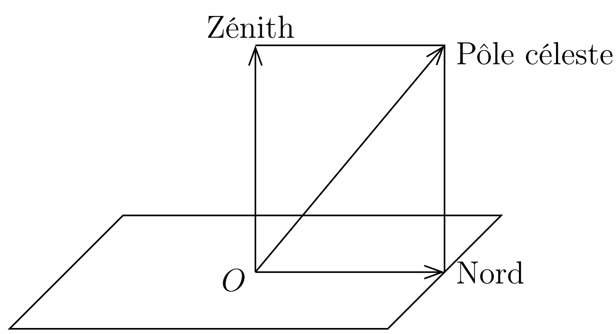


FIGURE 4.12 –

Finalement, on place sur notre dessin la direction de l'est et celle de

Clermont. Le problème de Picard est d'évaluer l'angle marqué sur la figure 4.13.

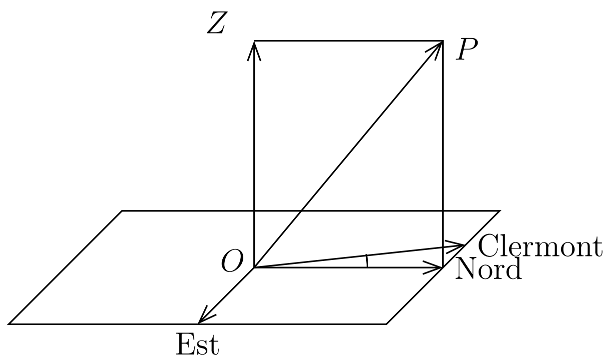


FIGURE 4.13 –

4. On fait ensuite remarquer aux élèves que notre problème ne fait intervenir que des angles. Il ne s'agit que de repérer des directions de l'espace. Pour repérer des angles dans le plan, il est fortement indiqué d'utiliser un cercle. Dans l'espace, on utilise une sphère. Il s'agit de mettre en place la figure 4.14.

   Pour repérer les directions de l'espace, à partir du point G, on considère une sphère centrée en G (n'importe laquelle). Chaque demi-droite issue de G coupe la sphère en un point unique. L'intersection du plan horizontal et de notre sphère est un cercle.
   La demi-droite $[GZ)$ donne la direction du zénith, $[GP)$ celle du pôle céleste, $[GP")$ celle du nord, $[GE)$ celle de l'est, $[GI)$ celle de Clermont. L'angle α que nous cherchons est $\widehat{P"GI}$.
5. Picard explique qu'il repère la plus grande digression orientale de la polaire. La figure 4.15 contribue à éclaircir le débat.

   Picard observe l'étoile polaire. Son mouvement apparent est celui d'un cercle, centré autour de l'axe (GP). Picard repère la direction de la position la plus à l'est de la polaire.
6. On place maintenant sur la figure 4.14 la direction observée par Picard et on obtient la figure 4.16.
   Le fait que la polaire soit située à l'est du pôle se traduit par le fait

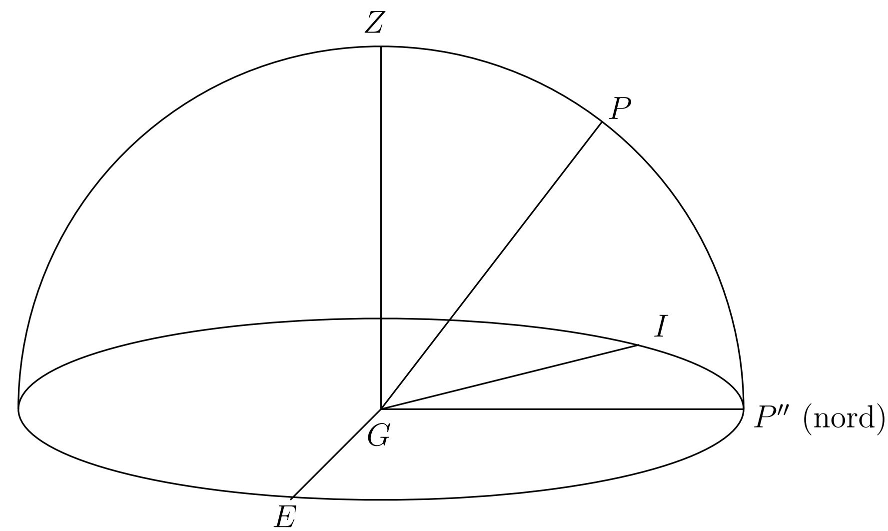


FIGURE 4.14 –

que les angles $\widehat{PGP"}$ et $\widehat{AGA"}$ sont égaux. On remarquera aussi que le projeté orthogonal P' de P sur le plan horizontal est sur la demi droite $[GP")$ et que, de même, A' est sur $[GA")$.

On explique enfin que Picard mesure en fait l'angle $\widehat{A"GI}$, qu'il mesure par ailleurs l'angle $\widehat{P"GP}$ (c'est la hauteur du pôle). Enfin, Picard connaît l'angle $\widehat{PGA}$ (quelqu'un d'autre semble-t-il a fait cette mesure).

7. On peut maintenant donner aux élèves le texte de l'activité C. On leur fait marquer sur la figure les angles connus et l'angle à calculer. La suite de l'activité ne pose pas de gros problème : c'est un problème de géométrie classique pour des élèves de première S.

   On obtient et $\widehat{IGP"} = 4°55' - 3°46' = 1°09'$ (ce qui est effectivement la valeur donnée par Picard). La partie C de l'activité est laissée à finir aux élèves pour la séance suivante.

Déroulement de l'activité. Réactions des élèves. Troisième séance (1 heure)

Il s'agit maintenant de corriger la partie C, puis la partie D et de conclure. On obtient :

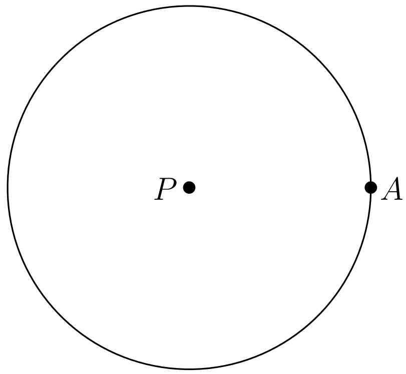


FIGURE 4.15 –

$$N\beta = 10\ 558,83\text{toises}$$
$$N\gamma = 18\ 893,66\text{toises}$$
$$\gamma\delta = 17\ 560,46\text{toises}$$
$$\delta\alpha = 31\ 894,09\text{toises.}$$

On en déduit que :

$$\alpha\beta = 78\ 907\text{toises.}$$

Picard obtient ce résultat. Il effectue diverses corrections et retient la valeur de 78 850 toises. La mesure du degré de méridien est alors :

$$\frac{78\ 850}{1 + 22/60 + 55/3600}\text{toises.}$$

Cette mesure correspond à $111,204$ km. Ce qui donne, dans l'hypothèse où la terre est assimilée à une sphère, une circonférence de 40 033 km.

Pour conclure, il reste à essayer de critiquer le résultat de Picard et essayer, enfin, de répondre à la question légitime des élèves : combien mesure, *pour de vrai*, le méridien terrestre. J'ai pris le parti, tout au long du déroulement de l'activité, de ne pas répondre à cette question, me contentant de dire que le résultat de Picard est de l'ordre de 40 000 km.

On peut soumettre aux élèves quelques précisions.

Tout d'abord, Picard part du principe que la Terre est sphérique. On sait (les élèves savent) que ce n'est pas tout à fait exact, qu'elle est aplatie

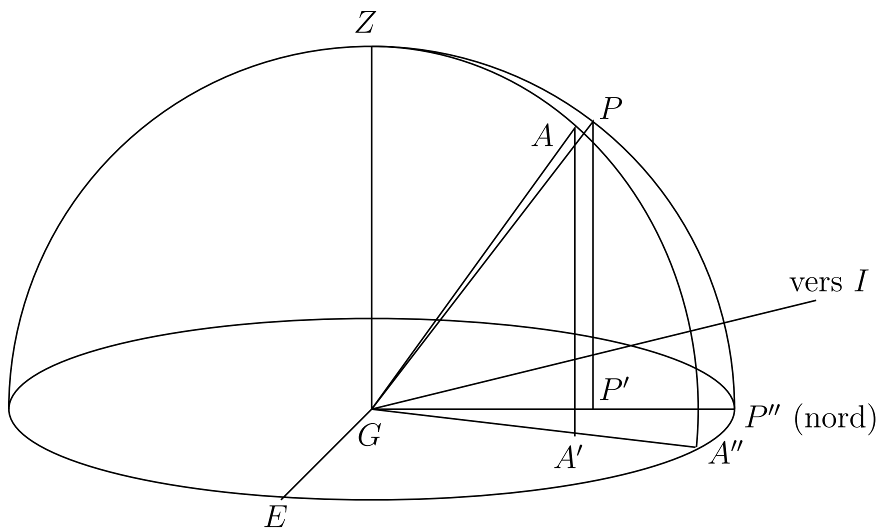


FIGURE 4.16 –

aux pôles. Lorsque Picard effectue sa mesure, personne ne s'en doute. Les expériences de Richer, faisant apparaître que la longueur d'un pendule qui bat la seconde n'est pas la même à Paris qu'à Cayenne, datent de 1672 (deux ans après la mesure de Picard). Ces expériences font apparaître une différence de la pesanteur entre ces deux points, suggérant que Cayenne est plus loin que Paris du centre de la Terre.

L'interprétation de ces résultats est au cœur d'une polémique au XVIII^e siècle dans les cercles scientifiques français, entre les tenants de la physique newtonienne (qui soutenaient que la Terre est aplatie aux pôles) et les tenants de la physique cartésienne (qui soutenaient qu'elle est au contraire allongée). La question fut tranchée par des mesures du degré du méridien effectuées en Laponie (Maupertuis, 1736-37), au Pérou (Bouguer, La Condamine, 1736-43) et en Afrique du sud (La Caille, 1752) :

la Terre est aplatie aux pôles.

Parmi les critiques faites à Picard, signalons celles de Maupertuis, qui portent sur les observations astronomiques de Picard. Maupertuis adopte les « mesures terrestres »de Picard (ne trouvant rien à redire), mais tient pour peu sûres ses mesures de latitudes.

Une autre mesure fameuse, et dont il faut bien sûr parler aux élèves, est celle qu'ont effectuée Delambre et Méchain entre 1792 et 1798 entre Barcelone et Dunkerque. Il s'agissait d'établir un étalon du mètre, lequel était défini en 1791 comme la dix-millionième partie du méridien terrestre [3]. Autrement dit, par définition, le méridien terrestre mesure 40 000 km.

La précision de la mesure de Delambre et Méchain n'étant pas suffisante, la définition du mètre a évolué. En 1889, la définition du mètre change une première fois : le mètre devient seulement la longueur de l'étalon déposé au pavillon de Breteuil à Sèvre. Nouvelle définition en 1960 : un mètre égale 1 650 763,73 fois la longueur d'onde, dans le vide, de la radiation orange de l'atome de krypton 86. La définition actuelle du mètre date de 1983. Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant 1/299 792 458 seconde.

Conclusion

Le temps consacré à l'ensemble de ces activités est de l'ordre de six heures. Ces activités ont été conçues dans le cadre des anciens programmes de première S, à l'époque où l'horaire hebdomadaire comportait six heures de mathématiques. Les nouveaux horaires (restreints) et programmes (copieux) peuvent être un élément dissuasif pour entreprendre une activité aussi longue.

Ceci dit, le travail effectué par les élèves s'insère bien dans le cadre du programme de première S (comme application du produit scalaire) et la géométrie qui y est pratiquée est bien celle qu'on fait usuellement pratiquer aux élèves de cette classe.

Par contre, la perspective dans laquelle ces activités se situent me semble formatrice pour les élèves, essentiellement parce que la question posée (quelle est la forme de la Terre et quelles sont ses dimensions ?) est une vraie question et que les textes qui sont proposés donnent des réponses qui sont elles-mêmes sujettes à caution. Même les résultats obtenus par Picard ne peuvent pas être tenus pour certains. À la différence de ce qui nous est parvenu d'Ératosthène, nous avons là un texte scientifique documenté. Les méthodes de mesures utilisées sont décrites avec précision, les lieux où ces mesures ont été faites sont bien identifiés, de sorte que quiconque voudrait vérifier les résultats obtenus par Picard pourrait le faire. C'est tellement vrai que certaines mesures ont été refaites par la suite (par exemple, les mesures de latitude d'Amiens et de Paris par Maupertuis). Mon expérience récente des TPE en classe de Terminales S m'a permis de constater qu'il est indispensable de faire comprendre aux élèves la différence entre un texte de style journalistique et un texte

3. Cette définition est inconnue de la plupart des élèves. Il m'a été donné d'entendre des étudiants d'IUFM s'extasier sur le fait que la mesure du méridien soit exactement de 40 000 km.

scientifique. Il me semble que les activités présentées ici peuvent aider à faire cette distinction.

4.5 Bibliographie

Guedj Denis, Le mètre du monde, Seuil, 2000.

Montucla Jean-Étienne, *Histoire des mathématiques*, Paris, 2de éd., 1799-1802.

Segonds A., Verdet J.-P. (1993), *Astronomie et Astrophysique*, Textes essentiels, Larousse.

Maupertuis Pierre Louis Moreau de (1740) Degré du méridien entre Paris et Amiens, déterminé par la mesure de M. Picard, et par les observations de Mrs de Maupertuis, Clairaut, Camus, Le Monnier… d'où l'on déduit la figure de la Terre, par la comparaison de ce Degré avec celui qui a été mesuré au cercle polaire. Paris, G. Martin, J. B. Coignard & H. L. Guérin, 1740, LVI-116 p., 7 pl. Mesure de la Terre de Picard : pages 1-106, observations de Le Monnier : pages 107-116.

Picard Jean (1684) Traité du nivellement… et un abbregé de la mesure de la terre… Mis en lumière par les soins de M. de La Hire… Paris, Estienne Michallet, 10-250 p. et mini pl.